Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

C_0–grupo gerado pelo operador de ondas em $\mathbb{R}^N$

Igor Laélio Barbosa Souza

João Pessoa – PB
Março de 2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

C_0–grupo gerado pelo operador de ondas em $\mathbb{R}^N$

por

Igor Laélio Barbosa Souza

sob a orientação do professor

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa – PB
Março de 2015

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S729c Souza, Igor Laélio Barbosa.
C_0-grupo gerado pelo operador de ondas em $\mathbb{R}^N$/ Igor Laélio Barbosa Souza- João Pessoa, 2015.
152f.

Orientador: Flank David Morais Bezerra
Dissertação (Mestrado)- UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Semigrupos. 3. Grupos. 4. Operador de ondas. 5. Gerador infinitesimal-C_0-grupos.

UFPB/BC CDU: 51(043)

C_0–grupo gerado pelo operador de ondas em $\mathbb{R}^N$

por

Igor Laélio Barbosa Souza [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 12 de março de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra– UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos–UFCG
(Examinador Externo)

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira – UFPB
(Examinador Interno)

[1]O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais...

Agradecimentos

A Deus, Grande Arquiteto do Universo, pela fonte de sabedoria, inspiração e pela conclusão de mais uma etapa da minha vida, na qual sempre esteve presente.

Aos meus queridos e amados pais, Norma Suely e Hélio Lucas, pelo apoio incondicional, carinho, exemplo e dignidade, fundamentais para a formação do meu caráter, por terem colocado os estudos como prioridade e pelo incentivo dado a cada passo que caminhei.

Aos meus irmãos, Ingrid Raíra, Ian Felipe e Devid Lucas pela força e ajuda nos melhores e piores momentos.

Às minhas tias, em especial Tia Ane, por todo apoio que me deu.

Ao meu orientador, o professor Doutor Flank David Morais Bezerra, pela paciência, apoio, postura, dedicação e contribuições, mostrando-se sempre disponível.

Aos meus colegas de Mestrado, em especial Cassio Nunes, Isabelly Camila e Wasthenny Vasconcelos por todas as horas de estudos em grupo.

Aos membros da banca examinadora que se dispusera a avaliar este trabalho.

Aos demais professores do Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação profissional, ética e moral.

Se a saudade chegasse pelo ar como as ondas da rádio, em que lembrança você sintonizaria a memória?
Cristovam Buarque

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma introdução à teoria de C_0-semigrupos (e C_0-grupo) de operadores lineares e limitados, e mostramos que operador de ondas em $\mathbb{R}^N$ é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores lineares e limitados em um espaço de Banach apropriado.

Palavras-chave: semigrupos, grupos, operador de ondas, gerador infinitesimal de C_0-grupos.

Abstract

In this work, we present an introduction to the theory of C_0-semigroup (and C_0-group) of bounded linear operators, and we show that wave operator in $\mathbb{R}^N$ is the infinitesimal generator of a C_0-group of bounded linear operators in a appropriate Banach space.

Keywords: semigroups, groups, waves operator, infinitesimal generator of C_0-groups.

Sumário

Notações

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais $\{1, 2, \ldots\}$;

- $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

- $\mathbb{K}$ denota o corpo dos números reais, $\mathbb{R}$, ou corpo dos números complexos, $\mathbb{C}$;

- I_n denota a matriz identidade de ordem n;

- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y, onde X e Y são espaços de Banach, munido da norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y \, ;$$

Em particular, denotaremos o espaço $\mathcal{L}(X, X)$ simplesmente por $\mathcal{L}(X)$;

- $X \hookrightarrow Y$ denota a imersão do espaço topológico X no espaço topológico Y, isto é, o espaço topológico X é um subespaço topológico de Y e a aplicação identidade definida em X e tomando valores em Y é contínua;

- $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto;

- $R(\mathcal{A})$ denota a imagem do operador $\mathcal{A}$.

- $int(\Omega)$ denota o interior do conjunto Ω.

- $d(A, B)$ denota a distância do conjunto A ao conjunto B.

Introdução

Neste trabalho estudamos teoria das distribuições, a transformada de Fourier e a teoria de semigrupos e grupos de operadores lineares e limitados em espaços de Banach. O nosso principal objetivo é provar que o operador de ondas em $\mathbb{R}^N$ é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores lineares e limitados em um apropriado espaço de Banach. Para melhor descrever o resultado aqui estudados, a seguir, daremos algumas definições.

Seja X um espaço de Banach. Entende-se por um semigrupo de operadores lineares e limitados em X, uma família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares e limitados de X em X que satisfaz

(i) $T(0) = I$ (I é o operador identidade em X);

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \geq 0$.

Um semigrupo de operadores lineares e limitados $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ será chamado de fortemente contínuo ou C_0-semigrupo se

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

O operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$ definido no domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X; \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{existe} \right\}$$

pela lei de formação

$$\mathcal{A}x = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{d^+T(t)x}{dt}\right|_{t=0} \text{ para todo } x \in D(\mathcal{A})$$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Uma família $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ de operadores lineares e limitados em um espaço de Banach X é um C_0-grupo de operadores lineares e limitados se

(i) $T(0) = I$ (I é o operador identidade em X);

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $-\infty < t, s < \infty$;

(iii) $\lim_{t \to 0} T(t)x = x, \quad \text{para todo } \; x \in X.$

O gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ do grupo $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ é definido por

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

quando o limite existe, o domínio de $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ onde o limite acima existe.

Seja X um espaço de Banach. Considere $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$ um operador linear(não necessariamente limitado), $u_0 \in D(\mathcal{A})$ e o problema de valor inicial para uma equação diferencial linear autônoma em $[0, \infty)$,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathcal{A}u, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Supondo que o problema (1) possui uma única solução global, em algum sentido, isto é, existe uma única aplicação $u : [0, \infty) \to X$ tal que $u(t) \in D(\mathcal{A})$ para todo $t \geq 0$, vale a equação

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{A}u,$$

em algum sentido para todo $t \geq 0$ e $u(0) = u_0$.

A idéia da teoria de semigrupos é que a solução de um problema de valor inicial, como o problema (1), para um operador linear não limitado $\mathcal{A}$ sobre um espaço de Banach X; possa ser dada por $T(t)u_0$, para todo $t \geq 0$, se o operador $\mathcal{A}$ gerar o semigrupo. Esta teoria, é portanto, uma ferramenta poderosa no estudo de solução de sistemas equações diferenciais.

Estruturamos o trabalho da seguinte maneira.

No *Capítulo* 1, estudamos os resultados necessários a serem utilizados no decorrer do trabalho. Iniciamos com resultados básicos da teoria das distribuições, também apresentamos a transformada de Fourier e finalmente os espaços de Sobolev. Este capítulo tem como base o livro do Medeiros [11]

No *Capítulo* 2, apresentamos a teoria de C_0-semigrupos de operadores lineares e limitados e a caracterização dos seus geradores infinitesimais. Este capítulo tem como base o livro do Pazy [12].

No *Capítulo* 3, estudamos o problema de valor inicial para a equação de ondas em $\mathbb{R}^N$, isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2}$$

Este problema de valor inicial é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3}$$

onde $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Usando teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados, mostramos que o operador

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores lineares e limitados para uma escolha apropriada do espaço de Banach. Assim, o problema (2) está associado a um C_0-grupo $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$, onde $T(t) = e^{t\mathcal{A}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, apresentamos o problema de valor inicial para a equação de ondas amortecidas em $\mathbb{R}^N$, isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4}$$

onde a função $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é estritamente positiva, tal que $0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Usando teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados, e Teorema 2.57, mostramos que o operador

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a(x)I \end{pmatrix}$$

é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Assim, o problema (4) está associado a um C_0-grupo $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$, onde $T(t) = e^{t\mathcal{C}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Resultados básicos da teoria das distribuições

Este capítulo é dedicado à teoria das distribuições. Alguns resultados sobre os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ são enunciados e suas provas são omitidas. Para maiores detalhes, veja [1, 7, 8, 11, 16].

Seja $N \in \mathbb{N}$. Dados $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ e $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N,\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_N^{\alpha_N},\ \text{e}\ \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_N!.$$

No que segue, $\mathcal{D}^\alpha$ denota operador derivação de ordem α e é definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Em particular, se $\alpha = (0, \ldots, 0)$ define-se $\mathcal{D}^0 u = u$ para toda função u, e se α é uma lista cujas entradas são todas iguais a zero, exceto a $i-$ésima entrada que é igual 1, define $\mathcal{D}_i$ como sendo a derivada parcial $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ da função u com relação à variável x_i.

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, então escreve-se $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_i \leq \alpha_i$ para $i = 1, \ldots, N$. Quando u e v forem funções numéricas suficientemente deriváveis, tem-se a regra de Leibnz dada por

$$\mathcal{D}^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (\mathcal{D}^\beta u)(\mathcal{D}^{\alpha - \beta} v).$$

1.1 Espaço das funções testes

Sejam u uma função numérica e mensurável definida em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, e $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ a família de todos subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i$ de Ω tais que $u = 0$ quase sempre (q.s.) em $\mathcal{O}_i$. Considere o subconjunto aberto $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, então $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}$. Como consequência deste fato, temos a seguinte definição.

Definição 1.1. *Sejam u uma função numérica e mensurável definida em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, e $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ a família de todos subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i$ de Ω tais que $u = 0$ quase sempre (q.s.) em $\mathcal{O}_i$. O subconjunto fechado de Ω, tal que*

$$supp(u) = \Omega \backslash \mathcal{O}$$

é chamado de suporte de u, denotado por $supp(u)$.

Observe que se u for contínua em Ω, então

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}},$$

ou seja, o $supp(u)$ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ em Ω.

Proposição 1.1. *Sejam u e v funções numéricas, mensuráveis em Ω e $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Então*

(i) $supp(u+v) \subset [supp(u)] \cup [supp(v)]$;

(ii) $supp(uv) \subset [supp(u)] \cap [supp(v)]$;

(iii) $supp(\lambda u) = \lambda supp(u)$.

Prova: Para provar (i), dado $x \notin [supp(u)] \cup [supp(v)]$, então $x \notin supp(u)$, isto é, $x \in \mathcal{O}_u$, onde

$$\mathcal{O}_u = \bigcup_{i\in\mathcal{I}_u} \mathcal{O}_{iu},$$

e $\{\mathcal{O}_{iu}\}_{i\in\mathcal{I}_u}$ é uma família dos abertos onde u é zero quase sempre. Por outro lado, $x \notin supp(v)$, isto é, $x \in \mathcal{O}_v$, onde $\mathcal{O}_v = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}_v} \mathcal{O}_{iv}$ e $\{\mathcal{O}_{iv}\}_{i\in\mathcal{I}_v}$ é uma família dos abertos onde v é zero quase sempre. Daí, $x \in \mathcal{O}_u \cap \mathcal{O}_v = \mathcal{O}'_{iuv}$, onde $\mathcal{O}'_{iuv}$ é um aberto contido em Ω, com $u+v=0$ quase sempre em $\mathcal{O}'_{iuv}$. Então $x \in \mathcal{O}$, tal que

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i\in\mathcal{I}_{uv}} \mathcal{O}'_{iuv}.$$

Logo, $x \notin supp(u+v)$ e portanto

$$supp(u+v) \subset [supp(u)] \cup [supp(v)].$$

Para provar (ii), dado $x \notin [supp(u)] \cap [supp(v)]$, então $x \in \mathcal{O}_{uv}$, onde

$$\mathcal{O}_{uv} = \bigcup_{i\in\mathcal{I}_{uv}} \mathcal{O}_{iuv},$$

sendo $u = 0 = v$ quase sempre em $\mathcal{O}_{iuv}$, onde $\mathcal{O}_{iuv}$ são abertos de Ω. Isso significa que $uv = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}'_{iuv}$, onde $\mathcal{O}'_{iuv}$ é um aberto de Ω. Então $x \in \mathcal{O}'_{uv}$ tal que

$$\mathcal{O}'_{uv} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{uv}} \mathcal{O}'_{iuv}.$$

Logo, $x \notin supp(uv)$ e portanto

$$supp(uv) \subset [supp(u)] \cap [supp(v)].$$

Para provar (iii), considere os seguintes conjuntos,

$$F_1 = \{\mathcal{O}_i \subset \Omega;\ \mathcal{O}_i \text{ aberto e } u = 0 \text{ q.s. em } \mathcal{O}_i\},$$

$$F_2 = \{\mathcal{P}_i \subset \Omega;\ \mathcal{P}_i \text{ aberto e } \lambda u = 0 \text{ q.s. em } \mathcal{P}_i\}.$$

Claramente $F_1 = F_2$, basta notar que

$$\bigcup_{\mathcal{O}_i \in F_1} \mathcal{O}_i = \bigcup_{\mathcal{P}_i \in F_2} \mathcal{P}_i$$

o que é equivalente a

$$\Omega \backslash \left(\bigcup_{\mathcal{O}_i \in F_1} \mathcal{O}_i \right) = \Omega \backslash \left(\bigcup_{\mathcal{P}_i \in F_2} \mathcal{P}_i \right),$$

e pela definição de suporte,

$$supp(u) = supp(\lambda u). \tag{1.1}$$

Não é difícil notar que

$$\lambda supp(u) = supp(u), \tag{1.2}$$

logo, por 1.1 e 1.2,

$$\lambda supp(u) = supp(\lambda u). \tag{1.3}$$

□

Proposição 1.2. *Seja u uma função numérica e mensurável no $\mathbb{R}^N$. A função $\tau_y u$ definida por $(\tau_y u)(x) = u(x - y)$, denominada translação de u por y, tem a seguinte* *propriedade*

$$supp(\tau_y u) = y + supp(u). \tag{1.4}$$

Prova: Se $x \notin y + supp(u)$, então não existe $z \in supp(u)$ tal que $x = y + z$, ou seja, $x - y = z$. Isto implica que $x - y \notin supp(u)$, logo

$$x - y \in \mathcal{O} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_i,$$

onde $u(\cdot) = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$, isto é, $x - y \in \mathcal{O}_{i_0}$ tal que $u(\cdot) = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_{i_0}$, segue que $x \in \mathcal{O}_{i_0} + y$ tal que $u(\cdot - y) = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_{i_0}$, portanto, $x \notin supp(\tau_y u)$. Agora se $x \notin supp(\tau_y u)$, então

$$x \in \mathcal{O}' = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{O}'_i,$$

isto implica que $x \in \mathcal{O}'_{i_0}$ tal que $\tau_y u(\cdot) = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}'_{i_0}$, logo $u(\cdot - y) = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}'_{i_0}$, então $x - y \in \mathcal{O}'_{i_0}$ tal que $u(\cdot) = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}'_{i_0}$, portanto $x - y \notin supp(u)$, segue que $x \notin y + supp(u)$, o que prova (1.4).

□

Agora apresentaremos os espaços $L^p(\Omega)$ e algumas propriedades.

Definição 1.2. *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$, denota-se por $L^p(\Omega)$, a classe de todas as funções u definidas em Ω, mensuráveis tais que $|u|^p$ é integrável em Ω, munido da norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v}(x)dx,$$

onde $\overline{v}$ é o conjugado de v.

Definição 1.3. *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$. Denota-se por $L^\infty(\Omega)$ a classe de todas as funções u definidas em Ω, mensuráveis em Ω que são essencialmente limitadas munido da norma*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| \, ,$$

onde $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ *pode ser apresentada como em [4], na seção* 4.2.

Definição 1.4. *Diz-se que* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ *se* $u\chi_K \in L^p(\Omega)$ *para todo conjunto compacto* $K \subset \Omega$, *onde* $u\chi_K(x) = u(x)$ *se* $x \in K$ *e* $u\chi_K(x) = 0$ *se* $x \notin K$.

Note que se $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, então $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, seja qual for Ω subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$.

Definição 1.5. *Sejam* u *e* v *funções numéricas definidas no* $\mathbb{R}^N$. *Define-se convolução das funções* u *e* v *a operação*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} v(x-y)u(y)dy.$$

A seguir, temos mais uma propriedade do suporte de funções nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.3. *Sejam* $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $v \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *com* $1 \leq q \leq \infty$. *Então*

$$supp(u * v) \subset \overline{supp(u) + supp(v)}. \tag{1.5}$$

Prova: Fixe $x \in \mathbb{R}^N$ tal que a função $y \mapsto u(x-y)v(y)$ seja integrável. Temos

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y)dy = \int_{[x-supp(u)]\cap[supp(v)]} u(x-y)v(y)dy.$$

Utilizando as propriedades de suporte apresentadas, prova-se a segunda igualdade:

$$supp(u(x-y)v(y)) \quad \subset \quad [supp(u(x-y))] \cap [supp(v(y))] = [x - supp(u)] \cap [supp(v(y))].$$

Se $x \notin supp(u) + supp(v)$, então $[x - supp(u)] \cap [supp(v)] = \varnothing$, pois nesse caso, $x \notin supp(v)$. Assim $u(x-y)v(y) = 0$, ou seja, $(u * v)(x) = 0$. Isso significa que $x \notin supp(u * v)$, logo $(u * v)(x) = 0$ q.s. em $[supp(u) + supp(v)]^c$. Em particular $(u * v)(x) = 0$ q.s. em $int((supp(u) + supp(v))^c)$. Portanto,

$$supp(u * v) \subset \overline{supp(u) + supp(v)}.$$

□

Definição 1.6. *Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$. *O espaço vetorial das funções numéricas definidas em* Ω *com suporte compacto, possuindo derivadas parciais de todas as ordens em todos os pontos de* Ω *é representado por* $C_0^\infty(\Omega)$. *Os elementos de* $C_0^\infty(\Omega)$ *são chamados de funções testes em* Ω.

Exemplo 1.1. *Seja $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}} & se \ \|x\| < 1 \\ 0 & se \ \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2$, tem-se $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.4. *Seja $k = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx$, onde ρ é a função do Exemplo 1.1 e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função $\rho_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\rho_n(x) = \left(\frac{n^N}{k}\right) \rho\,(nx)\,, \ \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Então ρ_n é uma função teste do $\mathbb{R}^N$ possuindo as seguintes propriedades

(1) $0 \leq \rho_n(x) \leq n^N/ke$;

(2) $supp(\rho_n) = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x\| \leq 1/n\}$;

(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx = \int_{\|x\|\leq 1/n} \rho_n(x) = 1.$

Prova: Note que $\rho_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, observa-se que para $\|x\| < 1/n$

$$e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}} \leq e^{-1},$$

pois $\frac{-1}{1-\|x\|^2} \leq -1$. Então

$$\left(\frac{n^N}{k}\right) e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}} \leq \left(\frac{n^N}{ke}\right), \tag{1.6}$$

o que implica

$$0 \leq \rho_n(x) \leq n^N/ke \ \text{ para } \|x\| < 1/n.$$

Para provar (2), basta notar que sendo ρ_n uma função contínua, segue que

$$supp(\rho_n) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N; \ \rho_n(x) \neq 0\}},$$

mas por (1),

$$supp(\rho_n) \ = \ \overline{\{x \in \mathbb{R}^N; \ \|nx\| < 1\}} = \{x \in \mathbb{R}^N; \ \|x\| \leq 1/n\}.$$

Para provar (3), vamos calcular a integral de ρ_n.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{n^N}{k}\right) \rho(nx)dx \\
&= \left(\frac{n^N}{k}\right) \int_{\|x\|<1/n} e^{\frac{-1}{1-\|nx\|^2}} dx + \left(\frac{n^N}{k}\right) \int_{\|x\|\geq 1/n} e^{\frac{-1}{1-\|nx\|^2}} dx \\
&= \left(\frac{n^N}{k}\right) \int_{\|x\|<1/n} e^{\frac{-1}{1-\|nx\|^2}} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $y = nx$, então $dy = n^N dx$, e daí

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx &= \left(\frac{n^N}{k}\right) \int_{\|x\|<1/n} e^{\frac{-1}{1-\|nx\|^2}} dx \\
&= \left(\frac{n^N}{k}\right) \int_{\|y\|<1} e^{\frac{-1}{1-\|y\|^2}} \frac{dy}{n^N} \\
&= \left(\frac{1}{k}\right) \int_{\|y\|<1} e^{\frac{-1}{1-\|y\|^2}} dy.
\end{aligned}$$

Substituindo k, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx = \int_{\|x\|<1/n} \rho_n(x)dx = 1.$$

□

Definição 1.7. *Uma sequência de funções testes no $\mathbb{R}^N$ com as propriedades* (1), (2) *e* (3) *é denominada sequência regularizante.*

Lema 1.5. *Se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: De fato, basta notar que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|dx &= \int_{supp(u)} |u(x)|dx \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{supp(u)} dx \\
&= \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |supp(u)| < \infty,
\end{aligned}$$

onde $|supp(u)|$ é a medida do suporte de u. Portanto, u pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$.

□

Proposição 1.6. *Sejam $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Então $D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e $u * v$ pertence a $C_0^\infty \cap L^p(\mathbb{R}^N)$. Se v possui suporte compacto, então $u * v$ é uma função teste no $\mathbb{R}^N$.*

Prova: Para mostrar que $D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v$, é suficiente provar para um $\alpha_j = (0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)$, onde a j-ésima posição é 1 e as demais são iguais a zero, então

$$D^\alpha(u*v) = D_j(u*v) = \frac{\partial}{\partial x_j}(u*v),$$

usando a definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}(u*v)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(u*v)(x+he_j)-(u*v)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{\mathbb{R}^N} u(x+he_j-y)v(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y)dy\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{u(x+he_j-y)-u(x-y)}{h}\right]v(y)dy.
\end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue [1], segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}(u*v)(x) &= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{u(x+he_j-y)-u(x-y)}{h}\right]v(y)dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\lim_{h\to 0}\frac{u(x-y+he_j)-u(x-y)}{h}\right]v(y)dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u(x-y)\right)v(y)dy.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u*v)(x) = (\partial u/\partial x_j * v)(x), \text{ para todo } j\in 1,\ldots,N. \tag{1.7}$$

Portanto,

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v,$$

para todo $\alpha\in\mathbb{N}^N$.

Para provar que $u*v$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^N)$, basta usar o teorema[2] associado ao Lema

[1]

Teorema 1.7 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)**.** *Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *que satisfaçam*

(a) $f_n(x)\to f(x)$ *q.s. em* Ω;

(b) Existe uma função g *em* $L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)|\le g(x)$ *q.s. em* Ω.

Então $f\in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)}\to 0$.

Prova: Ver [3], p. 44, Teorema 5.6.

□

[2]

1.5.

Para mostrar que $u * v$ pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, considere $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, segue que $\partial u/\partial x_j \in C_0(\mathbb{R}^N)$ e assim $(\partial u/\partial x_j * v)(x) \in C_0(\mathbb{R}^N)$, pois se $x_n \to x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} * v\right)(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_j}[u(x_n - y)]v(y)dy.$$

Calculando o limite quando n tente ao ∞, segue

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} * v\right)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_j}[u(x_n - y)]v(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_j}[u(x_n - y)]v(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_j}[u(x - y)]v(y)dy \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} * v\right)(x).
\end{aligned}$$

Segue que $u * v \in C^1(\mathbb{R}^N)$, portanto, $u * v$ pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$.

Para mostrar a terceira e última parte, basta usar (1.5), ou seja,

$$supp(D^\alpha u * v) \subset supp(D^\alpha u) + supp(v),$$

como $supp(D^\alpha u)$ e $supp(v)$ são compactos, e $supp(D^\alpha u * v) = supp(D^\alpha(u * v))$, temos $supp(D^\alpha(u * v))$ contido em um compacto. Agora, usando o fato de que $supp(D^\alpha(u * v)) \subset supp(u * v)$, segue que $supp(u * v)$ está contido em um compacto, ou seja, $u * v$ é uma função teste do $\mathbb{R}^N$.

$\square$

Lema 1.9. *Sejam K e F dois subconjuntos do $\mathbb{R}^N$, disjuntos, onde K compacto e F fechado. Existe uma função teste ϕ no $\mathbb{R}^N$ tal que*

$$\phi(x) \equiv 1 \text{ em } K,\ \phi(x) \equiv 0 \text{ em } F \text{ e } 0 \leq \phi(x) \leq 1.$$

Teorema 1.8 (Desigualdade de Young). *Sejam $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ a função $u \mapsto u(x-y)v(y)$ é integrável em $\mathbb{R}^N$, além disso, $u * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e vale a desigualdade*

$$\|u * v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.8}$$

Prova: Ver [8], p. 240, Teorema 8.7.

$\square$

Prova: Para construir uma função ϕ que satisfaça as condições impostas, considere $\epsilon = d(K,F)/4$ e construa os conjuntos $F_0 = \{x \in \mathbb{R}^N; d(x,K) \geq 2\epsilon\}$ e $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^N; d(x,K) \leq \epsilon\}$. Definindo a função $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de modo que $v(x) = d(x,F_0)/[d(x,F_0) + d(x,K_0)]$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, a função procurada é dada por $\phi = \rho_n * v$, onde ρ_n é apresentada no Lema 1.4 e $n \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon n \geq 1$. De fato, quando $x \in F$, segue que $v(x) = 0$, logo

$$\phi = \rho_n * v = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{n^N}{k}\right) \rho\left(n(x-y)\right) 0dy = 0.$$

Quando $x \in K$, segue que $v(x) = 1$, logo

$$\phi = \rho_n * v = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{n^N}{k}\right) \rho\left(n(x-y)\right) 1dy = 1.$$

E para $x \notin K \cup F$, segue que $0 < v(x) < 1$, logo

$$0 \leq \phi = \rho_n * v = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{n^N}{k}\right) \rho\left(n(x-y)\right) v(y)dy \leq 1,$$

assim, ϕ é a função desejada.

$\square$

A partir de agora, nosso objetivo é mostrar que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Para tal, começaremos com o seguinte resultado de continuidade.

Proposição 1.10. *Seja $u \in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Então a aplicação translação*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^N & \to & L^p(\mathbb{R}^N) \\ y & \mapsto & \tau_y u \end{array}$$

é contínua.

Prova: Considerando $y \in \mathbb{R}^N$ e $\{y_n\}$ um sequência de vetores de $\mathbb{R}^N$ com $y_n \to y$, tem-se

$$\begin{aligned} \|\tau_{y_n} u - \tau_y u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y_n) - u(x-y)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y-z_n) - u(x-y)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-z_n) - u(x)|^p dx, \end{aligned}$$

onde $z_n = (y_n - y) \to 0$.

Observe que é suficiente demonstrar que a aplicação é contínua para $y = 0$. Para isso, seja $\{y_n\}$ é uma sequência de vetores do $\mathbb{R}^N$ tal que $y_n \to 0$, prova-se a continuidade para $u = \chi_{\mathcal{O}}$ onde $\chi_{\mathcal{O}}$ é a função característica de um subconjunto aberto limitado $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^N$, ou seja,

$$\chi_{\mathcal{O}}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \mathcal{O} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash \mathcal{O}. \end{cases}$$

Tem-se

$$\|\tau_{y_n} u - \tau_y u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) - \chi_{\mathcal{O}}(x)|^p dx. \tag{1.9}$$

Observe que $\chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) \to \chi_{\mathcal{O}}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \partial\mathcal{O}$. De fato, se $x \in \mathcal{O}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) = \chi_{\mathcal{O}}(x)$. Se $x \in int(\mathbb{R}^N \backslash \partial\mathcal{O})$, então $\chi_{\mathcal{O}}(x) = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) = \chi_{\mathcal{O}}(x) = 0$, logo

$$\chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) \to \chi_{\mathcal{O}}(x), \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N. \tag{1.10}$$

Por outro lado,

$$|\chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) - \chi_U(x)|^p \leq |\chi_U(x)|^p, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.11}$$

onde $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\mathcal{O} + y_n) \cup \mathcal{O}$ é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$. De fato, se $x \in U$, então

$$|\chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) - \chi_U(x)| = \begin{cases} |\chi_U(x)| & \text{se } x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\mathcal{O} + y_n) \\ |\chi_U(x)| & \text{se } x \notin \mathcal{O}. \end{cases}$$

Portanto, vale (1.11) e aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue (veja Teorema 1.7) a integral da direita de (1.9), usando (1.10) e (1.11) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) - \chi_{\mathcal{O}}(x)|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_{\mathcal{O}}(x - y_n) - \chi_{\mathcal{O}}(x)|^p dx = 0,$$

ou seja,

$$\tau_{y_n} u \to u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo a translação é contínua em $y = 0$ para uma função escada u do $\mathbb{R}^N$, isto é, u é igual a uma combinação linear finita de funções características de subconjuntos abertos limitados de $\mathbb{R}^N$.

Note que o conjunto das funções escadas de $\mathbb{R}^N$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Então, dados

$u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\epsilon > 0$, existe uma função φ de $\mathbb{R}^N$ tal que $\|u-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \epsilon/3$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\|\tau_{y_n}u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|\tau_{y_n}u - \tau_{y_n}\varphi + \tau_{y_n}\varphi - \varphi + \varphi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\
&\leq \|\tau_{y_n}u - \tau_{y_n}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_{y_n}\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\
&= \|\tau_{y_n}(u-\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_{y_n}\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\
&= \|u-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_{y_n}\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\
&= 2\|u-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_{y_n}\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\
&< 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon, \;\text{ para todo }\; n \geq n_0,
\end{aligned}$$

o que prova o resultado desejado.

□

Teorema 1.11. *Seja $\{\rho_n\}$ uma sequência regularizante dada no Lema 1.4. Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, então a sequência $\{\rho_n * u\}$ converge para u em $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: Usando o fato de que $\int_{\|y\|\leq 1/n}\rho_n(y)dy = 1$, temos

$$\begin{aligned}
(\rho_n * u)(x) - u(x) &= \int_{\|y\|\leq 1/n}\rho_n(y)u(x-y)dy - \int_{\|y\|\leq 1/n}\rho_n(y)u(x)dy\\
&= \int_{\|y\|\leq 1/n}\rho_n(y)[u(x-y)-u(x)]dy. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Quando $p=1$, resulta do teorema de Fubini[3]

$$\begin{aligned}
\|\rho_n * u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\|y\|\leq 1/n}\rho_n(y)[u(x-y)-u(x)]dy\right|dx\\
&\leq \int_{\|y\|\leq 1/n}\rho_n(y)\left(\int_{\mathbb{R}^N}|[u(x-y)-u(x)]|dx\right)dy\\
&= \int_{\|y\|\leq 1/n}\rho_n(y)\|\tau_y u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}dy.
\end{aligned}$$

[3]

Teorema 1.12 (Teorema de Fubini)**.** *Sejam Ω_1, Ω_2 subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^N$. Assuma que $F \in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$. Então para $x \in \Omega_1$, q.s., $F \in L^1_y(\Omega_2)$ e $\int_{\Omega_2}F(x,y)d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$. Analogamente, para $y \in \Omega_2$, q.s., $F \in L^1_x(\Omega_1)$ e $\int_{\Omega_1}F(x,y)d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$. Além disso,*

$$\int_{\Omega_1}d\mu_1\int_{\Omega_2}F(x,y)d\mu_2 = \int_{\Omega_2}d\mu_2\int_{\Omega_1}F(x,y)d\mu_1 = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2}F(x,y)d\mu_1 d\mu_2. \qquad (1.13)$$

Prova: Ver [3], p. 119, Teorema 10.10.

□

Pela proposição anterior, sabe-se que $\tau_y u$ é contínua, logo

$$\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n * u) - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

No caso $1 < p < \infty$, considere q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De (1.12) e da desigualdade de Hölder [4], obtém-se

$$\begin{aligned} |(\rho_n * u)(x) - u(x)|^p &\leq \int_{\|y\|\leq 1/n} |\rho_n(y)[u(x-y) - u(x)]|^p dy \\ &\leq \left(\int_{\|y\|\leq 1/n} |\rho_n(y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}} \int_{\|y\|\leq 1/n} |[u(x-y) - u(x)]|^p dy. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Pela propriedade (1) de sequências regularizantes, $0 \leq \rho_n(x) \leq \frac{n^N}{ke}$, assim

$$\int_{\|y\|\leq 1/n} |\rho_n(y)|^q dy \leq \int_{\|y\|\leq 1/n} \frac{n^{Nq}}{k^q e^q} dy = \frac{n^{Nq}}{k^q e^q} \int_{\|y\|\leq 1/n} dy = \frac{n^{Nq}}{k^q e^q} w_N \frac{1}{n^N},$$

onde w_N é o volume da esfera unitária do $\mathbb{R}^N$. Portanto

$$\begin{aligned} \left(\int_{\|y\|\leq 1/n} |\rho_n(y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}} &\leq \left(\frac{n^{Nq-N}}{k^q e^q} w_N\right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \frac{w_N^{\frac{p}{q}} n^{(Nq-N)\frac{p}{q}}}{k^p e^p} \\ &= C n^{Np(1-\frac{1}{q})} \\ &= C n^N, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde $C = \frac{w_N^{p/q}}{k^p e^p}$ e sabemos que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Considerando (1.14) e (1.15), temos

$$|\rho_n * u - u|^p \leq C n^N \int_{\|y\|\leq 1/n} |[u(x-y) - u(x)]|^p dy.$$

4

Teorema 1.13 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (se $p = \infty$, então $q = 1$) então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver [4], p. 96, Teorema 4.6.

□

Integrando ambos os lados e aplicando o teorema de Fubini (veja Teorema 1.12), segue

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n * u - u|^p dx &\leq Cn^N \int_{\|y\|\leq 1/n} \int_{\mathbb{R}^N} |[u(x-y) - u(x)]|^p dx dy \\
&\leq Cw_N \sup_{\|y\|\leq 1/n} \|\tau_y u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Novamente pela continuidade da translação de τ_y, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n * u) - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

o que prova o teorema.

□

Observação 1.1. *É interessante mencionar o caso linear do Teorema da mudança de variáveis*[5]*, que foi usado para mostrar que* $\int_{\|y\|\leq 1/n} dy = \frac{w_N}{n^N}$. *Onde o volume da esfera de raio* r, $w_N(r)$ *é dado por* $w_N(r) = \frac{r^N \pi^{N/2}}{(N/2)!}$ *quando* N *é par e* $w_N(r) = \frac{1}{N!}[r^N \pi^{(N-1)/2} 2^N \left(\frac{N-1}{2}\right)!]$ *quando* N *é ímpar. Observe que destas fórmulas resulta*

$$\lim_{N\to\infty} w_N(r) = 0.$$

Para mais detalhes, consulte [9], p. 394, Exercício 6.12.

Então, para mostrar que $\int_{\|y\|\leq 1/n} dy = w_N \frac{1}{n^N}$, façamos $f(y) = 1$, $T(x) = \frac{1}{n}x$ e $X = B(0;1)$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\|y\|\leq 1/n} dy &= \int_{\|y\|\leq 1/n} f(y) dy \\
&= \int_{\|ny\|\leq 1} f(y) dy \\
&= \int_{B(0;1)} \frac{1}{n^N} dx \\
&= w_N \frac{1}{n^N}.
\end{aligned}
$$

5

Teorema 1.14 (Teorema da mudança de variáveis, caso linear)**.** *Sejam* $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *uma transformação linear invertível,* $X \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto J-mensurável e* $f : T(X) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável. Então*

$$\int_{T(X)} f(y) dy = \int_X f(T \cdot x) |\det T| dx$$

Prova: Ver [9], p. 382, Seção VI.

□

Lema 1.15. *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$. Existe uma sequência de conjuntos compactos $\{K_n\}$ tal que $K_n \subset K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

Prova: Basta tomar K_n do seguinte modo

$$K_n = \left\{x \in \Omega; d\left(x, \partial\Omega\right) \geq \frac{1}{n}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R}^N; \|x\| \leq n\}.$$

□

Teorema 1.16. *O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Prova: Seja $u \in L^p(\Omega)$. Pelo Lema 1.15, existe uma sequência de subconjuntos compactos $\{K_n\}$ em Ω, para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere a função $u_n = u\chi_{K_n}$, onde χ_{K_n} a função característica de K_n. Note que $u_n \in L^p(\Omega)$ para cada n, e a sequência $\{u_n\}$ converge para u em $L^p(\Omega)$, essa convergência decorre do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (veja Teorema 1.7). Do modo que as funções u_n foram definidas, elas possuem suporte compacto, então para provar o teorema, basta aproximar as funções u_n por funções de $C_0^\infty(\Omega)$.

Para isto, seja $u \in L^p(\Omega)$, u com suporte compacto, e considere $r = d(supp(u), \partial\Omega)$, que é um número positivo. Defina $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ por

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Duas propriedades são claras para $\tilde{u}$.

(1) $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Basta observar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^p dx = \int_\Omega |\tilde{u}|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} |\tilde{u}|^p dx = \int_\Omega |u|^p dx < \infty$$

(2) $supp(\tilde{u}) = supp(u)$ é um compacto do $\mathbb{R}^N$.

Essa igualdade dos suportes segue diretamente de suas propriedades apresentadas anteriormente.

Portanto, pelo Teorema 1.11, $(\rho_n * \tilde{u})$ é uma sequência de funções testes no $\mathbb{R}^N$ que converge para u em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Seja v_n a restrição a Ω da função $\rho_n * \tilde{u}$, então v_n é uma função teste em Ω para cada $n \geq 2/r$ e a sequência converge para u em $L^p(\Omega)$.

□

Definição 1.8. *Diz-se que um sequência* $\{\varphi_n\}$ *de funções de* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas*

a) Os suportes de todas as funções testes φ_n *estão contidos num compacto fixo* K*, ou seja,* $supp(\varphi_n) \subset K$ *para todo* $n = 1, 2, \ldots$.

b) Para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$*, a sequência* $\{\mathcal{D}^\alpha \varphi_n\}$ *converge uniformemente em* K.

Para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*, diz-se que* φ_n *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$*, quando a sequência* $\{\varphi_n - \varphi\}$ *converge para zero no sentido dado acima.*

Denominaremos por espaço das funções testes em Ω *e representaremos por* $\mathbf{D}(\Omega)$ *o espaço vetorial* $C_0^\infty(\Omega)$ *com esta noção de convergência.*

1.2 Distribuições sobre um aberto do $\mathbb{R}^N$

Nesta seção apresentaremos a noção de distribuições sobre um conjunto aberto contido no $\mathbb{R}^N$.

Definição 1.9. *Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$*. Uma distribuição sobre* Ω *é um funcional linear* T *sobre* $\mathbf{D}(\Omega)$ *que é contínuo no sentido da convergência definida sobre* $\mathbf{D}(\Omega)$*, ou seja, a sequência* $\{\langle T, \varphi_n \rangle\}$ *converge para zero em* $\mathbb{K}$*, sempre que a sequência* $\{\varphi_n\}$ *em* $\mathbf{D}(\Omega)$*, converge para zero no sentido da Definição 1.8.*

Note que $\langle T, \varphi_n \rangle$ *é o valor de* T *em* φ_n.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial com as operações usuais, a saber, este espaço é o dual topológico, $\mathbf{D}'(\Omega)$, de $\mathbf{D}(\Omega)$. Neste espaço vetorial, diz-se que uma sequência $\{T_n\}$ converge para zero em $\mathbf{D}'(\Omega)$, quando para toda função teste $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$, a sequência $\{\langle T_n, \varphi \rangle\}$ converge para zero em $\mathbb{K}$. Neste caso, escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$ em $\mathbf{D}'(\Omega)$ e diz-se que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \text{ em } \mathbf{D}'(\Omega)$$

quando

$$\lim_{n\to\infty} (T_n - T) = 0 \text{ em } \mathbf{D}'(\Omega).$$

Exemplo 1.2. *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Considere o funcional linear* T_u *definida em* $\mathbf{D}(\Omega)$ *por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

para toda $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$. *Então* T_u *é uma distribuição sobre* Ω.

De fato, primeiramente note que T_u *está bem definida, pois se* $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$, *então* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *e*

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u\varphi)(x)dx &= \int_{supp(\varphi)} (u\varphi)(x)dx \\ &\leq \int_{supp(\varphi)} |u(x)||\varphi(x)|dx \\ &\leq C_\varphi \int_{supp(\varphi)} |u(x)|dx < \infty,\end{aligned}$$

onde as duas desigualdades são justificadas, por $\sup\limits_{x \in supp(\varphi)} |\varphi| \leq C_\varphi$ *e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *respectivamente.*

Agora, para mostrar que T_u *é uma distribuição sobre* Ω, *suponha que* $\varphi_n \to \varphi$ *em* $\mathbf{D}(\Omega)$, *então existe um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que* $supp(\varphi_n - \varphi) \subset K$ *para todo* $n = 1, 2, \ldots,$ *segue*

$$\begin{aligned}|T_u(\varphi_n) - T_u(\varphi)| &= |\int_\Omega u(x)\varphi_n(x)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx| \\ &= |\int_\Omega u(x)[\varphi_n(x) - \varphi(x)]dx| \\ &\leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_K |u(x)|dx,\end{aligned}$$

como $\sup\limits_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0$ *quando* $n \to \infty$, *segue que* T_n *converge uniformemente para* T *em* $\mathbf{D}(\Omega)$.

O lema a seguir caracteriza as distribuições quando $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Lema 1.17 (Lema de Du Bois Raymond)**.** *Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* T_u *definida no exemplo anterior. O funcional linear* $T_u \equiv 0$ *se, e somente se* $u \equiv 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova: Não é difícil ver que se $u \equiv 0$ quase sempre em Ω, então $T_u \equiv 0$.

Para mostrar que a condição $T_u \equiv 0$ implica $u = 0$ quase sempre em Ω, considere um subconjunto aberto limitado $\mathcal{O}$ de Ω, pelo Teorema 1.16, sabemos que $\mathbf{D}(\mathcal{O})$ é denso em $L^1(\mathcal{O})$. Então dado $u \in L^1(\mathcal{O})$, para cada $\epsilon > 0$ existe $v \in \mathbf{D}(\mathcal{O})$ tal que

$$\int_{\mathcal{O}} |u - v|dx < \epsilon. \tag{1.16}$$

Por hipótese, $\int_{\mathcal{O}} u(x)\varphi(x)dx = 0$, para toda $\varphi \in \mathbf{D}(\mathcal{O})$, pois $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto limitado de Ω, então de (1.16) temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathcal{O}} v(x)\varphi(x)dx\right| &= \left|\int_{\mathcal{O}} v(x)\varphi(x)dx - \int_{\mathcal{O}} u(x)\varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathcal{O}} [v(x)\varphi(x) - u(x)\varphi(x)]dx\right| \\
&\leq max|\varphi| \int_{\mathcal{O}} |v(x) - u(x)|dx \\
&\leq \epsilon max|\varphi|, \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathbf{D}(\mathcal{O})$. Agora, considere os conjuntos

$$K_1 = \{x \in \mathcal{O}; v(x) \geq \epsilon\} \text{ e } K_2 = \{x \in \mathcal{O}; v(x) \leq -\epsilon\}$$

que são compactos e disjuntos de Ω. Pelo Lema 1.9, existem φ_1 e φ_2 em $\mathbf{D}(\mathcal{O})$ tais que

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = 1 \text{ em } K_1,\ \varphi_1 = 0 \text{ em } K_2 \text{ e } 0 \leq \varphi_1 \leq 1, \\
&\varphi_2 = 0 \text{ em } K_1,\ \varphi_2 = 1 \text{ em } K_2 \text{ e } 0 \leq \varphi_2 \leq 1.
\end{aligned}$$

Tomando $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, obtém-se:

$$\psi = 1 \text{ em } K_1,\ \psi = -1 \text{ em } K_2 \text{ e } -1 \leq \psi \leq 1.$$

Logo

$$\int_{\mathcal{O}} v(x)\psi(x)dx = \int_{\mathcal{O}\backslash K} v(x)\psi(x)dx + \int_K v(x)\psi(x)dx,$$

onde $K = K_1 \cup K_2$. Segue que

$$\int_K v(x)\psi(x)dx = \int_{\mathcal{O}} v(x)\psi(x)dx - \int_{\mathcal{O}\backslash K} v(x)\psi(x)dx,$$

Observe que pela definição de K_1 e K_1, que $|v| \leq \epsilon$ em $\mathcal{O}\backslash K$, e levando em conta (1.17) temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_K v(x)\psi(x)dx\right| &\leq \left|\int_{\mathcal{O}} v(x)\psi(x)dx\right| + \left|\int_{\mathcal{O}\backslash K} v(x)\psi(x)dx\right| \\
&\leq \epsilon \cdot max|\varphi| + \epsilon \int_{\mathcal{O}\backslash K} |\psi(x)|dx \\
&\leq \epsilon + \epsilon|\mathcal{O}\backslash K|.
\end{aligned}$$

Usando a definição de ψ e desta última desigualdade, segue

$$\int_K |v(x)|dx = \int_K |v(x)\varphi(x)|dx \leq \epsilon + \epsilon|\mathcal{O}\backslash K|.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} |u(x)|dx &\leq \int_{\mathcal{O}} |u(x)-v(x)|dx + \int_K |v(x)|dx + \int_{\mathcal{O}\backslash K} |v(x)|dx \\ &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon|\mathcal{O}\backslash K| + \epsilon|\mathcal{O}\backslash K| \\ &= 2\epsilon + 2\epsilon|\mathcal{O}\backslash K|.\end{aligned}$$

Fazendo ϵ tender a zero, obtém-se $u \equiv 0$ quase sempre em $\mathcal{O}$, como $\mathcal{O}$ foi escolhido arbitrariamente, resulta que $u \equiv 0$ quase sempre em Ω.

Observação 1.2. *Basicamente o Lema de Du Bois Raymond nos diz que para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, o funcional liner T_u é determinado por uma única função u quase sempre em Ω, ou seja, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se $u = v$ quase sempre em Ω. Por isso, diz-se a distribuição u ao invés de dizer a distribuição T_u.*

Depois que caracterizamos as distribuições definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, uma pergunta natural é: Todas as distribuições são definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$? A resposta é negativa, como veremos no exemplo que segue.

Exemplo 1.3. *Seja $x_0 \in \Omega$ e δ_{x_0} a forma linear em $\mathbf{D}(\Omega)$ definida do seguinte modo*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \text{ para toda } \varphi \in \mathbf{D}(\Omega).$$

Primeiramente note que δ_{x_0} está bem definida, pois para cada $x_0 \in \Omega$ toda função $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ está bem definida.

Para mostrar que δ_{x_0} é uma distribuição, tome uma sequência $\{\varphi_n\}$ em $\mathbf{D}(\Omega)$ que converge para φ em $\mathbf{D}(\Omega)$, então

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi_n \rangle = \varphi_n(x_0) \to \varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}.$$

Logo δ_{x_0} é uma distribuição sobre Ω, denominada Distribuição de Dirac ou Medida de Dirac concentrada em x_0. Quando $x_0 = 0$ escreve-se δ_0.

Agora vamos mostrar que δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ de modo que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \text{ para toda } \varphi \in \mathbf{D}(\Omega).$$

De fato, se existisse uma tal função u, então

$$\int_\Omega u(x)\|x-x_0\|^2\varphi(x)dx = \|x-x_0\|^2\varphi(x_0)|_{x=x_0} = 0,$$

para toda $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$, mas pelo Lema de Du Bois Raymond tem-se $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω, ou seja, $u = 0$ quase sempre em Ω, logo $\delta_{x_0} = 0$, o que é uma contradição. Portanto, existem distribuições que não são definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Exemplo 1.4. *Existem sequências $\{u_n\}$ de funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ que convergem para uma distribuições T em $\mathbf{D}'(\Omega)$, mas o limite T não pode ser definido por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, sejam $x_0 \in \Omega$ e $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x - x_0\| \leq r\}$ uma bola contida em Ω. Para cada $0 < \epsilon < r$, seja θ_ϵ a função teste*

$$\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{k\epsilon^N}\rho\left(\frac{x - x_0}{\epsilon}\right), \ \textit{para todo } x \in \Omega,$$

sendo $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}} & \textit{se } \|x\| < 1 \\ 0 & \textit{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

a função teste do Exemplo 1.1 e $k = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y)dy$. Tem-se para $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$,

$$\langle \theta_\epsilon, \varphi \rangle = \int_\Omega \frac{1}{k\epsilon^N}\rho\left(\frac{x - x_0}{\epsilon}\right)\varphi(x)dx = \frac{1}{k\epsilon^N}\int_\Omega \rho\left(\frac{x - x_0}{\epsilon}\right)\varphi(x)dx.$$

Se $y = \frac{x - x_0}{\epsilon}$, então $x = \epsilon y + x_0$ e $dx = \epsilon^N dy$ daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{k\epsilon^N}\int_\Omega \rho\left(\frac{x - x_0}{\epsilon}\right)\varphi(x)dx &= \frac{1}{k\epsilon^N}\int_\Omega \rho(y)\varphi(\epsilon y + x_0)\epsilon^N dy \\ &= \frac{1}{k}\int_\Omega \rho(y)\varphi(\epsilon y + x_0)dy. \end{aligned}$$

Observe que quando ϵ tende a zero, $\varphi(\epsilon y + x_0)$ tende a $\varphi(x_0)$. Logo

$$\frac{1}{k}\int_\Omega \rho(y)\varphi(\epsilon y + x_0)dy \to \varphi(x_0) \ \textit{quando } \epsilon \to 0^+.$$

Assim,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \theta_\epsilon = \delta_{x_0}$$

em $\mathbf{D}'(\Omega)$. Mas como vimos anteriormente, δ_{x_0} não é uma distribuição definida por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Lema 1.18. *Sejam $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ e $\{u_n\}$ uma sequência de funções de $L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p <$*

∞, *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \ em \ L^p_{loc}(\Omega).$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \ em \ \mathbf{D}'(\Omega).$$

Prova: De fato, seja $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ e $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto limitado de Ω tal que $supp(\varphi) \subset \mathcal{O}$.

Se $p = 1$, temos $\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$, então, dada uma sequência $u_n \to u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} |\langle u_n, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle| &= |\langle u_n - u, \varphi\rangle| \\ &= \left|\int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x)dx\right| \\ &\leq \max_{x\in\mathcal{O}} |\varphi(x)| \int_{\mathcal{O}} |u_n(x) - u(x)|dx, \end{aligned}$$

como $u_n \to u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, seque que $u_n \to u$ em $\mathbf{D}'(\Omega)$.

Se $1 \leq p < \infty$, considere o seu conjugado q, ou seja, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, então, dada uma sequência $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, temos

$$|\langle u_n - u, \varphi\rangle| \leq \|u_n - u\|_{L^p(\mathcal{O}}\|\varphi\|_{L^q(\mathcal{O})}.$$

Como $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$ e $\|\varphi\|_{L^q(\mathcal{O})} < \infty$, então $u_n \to u$ em $\mathbf{D}'(\Omega)$.

$\square$

Observação 1.3. *As seguintes afirmações são verdadeiras para* $1 \leq p < \infty$.

(i) $\mathbf{D}(\Omega)$ *é um subespaço vetorial denso em* $L^p_{loc}(\Omega)$;

(ii) $L^p_{loc}(\Omega)$ *é um subespaço vetorial denso em* $\mathbf{D}'(\Omega)$;

(iii) $\mathbf{D}(\Omega)$ *é um subespaço vetorial denso em* $\mathbf{D}'(\Omega)$.

Com efeito, para mostrar que $\mathbf{D}(\Omega)$ *é denso em* $L^p_{loc}(\Omega)$, *tome* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ *e* $\{K_n\}$ *uma sequência de subconjuntos de* Ω *dados no Lema 1.15. Para cada aberto* $\mathcal{O}_n = int(K_n)$, *pelo Lema 1.9, determina-se* $\varphi_n \in \mathbf{D}(\mathcal{O}_n)$ *tal que*

$$\|u - \varphi_n\|_{L^p(\mathcal{O}_\setminus)} < \frac{1}{n}.$$

A sequência $\{\varphi_n\}$ de funções testes converge em Ω para u em $L^p_{loc}(\Omega)$, quando $n \to \infty$.

O Lema 1.18 mostra que $L^p_{loc}(\Omega)$ é denso em $\mathbf{D}'(\Omega)$.

Definição 1.10. *Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. A derivada de ordem α de T é o funcional linear $\mathcal{D}^\alpha T$ definida em $\mathbf{D}(\Omega)$ por*

$$\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle, \ \textit{para toda } \varphi \in \mathbf{D}(\Omega).$$

Observe que $\mathcal{D}^\alpha$ é uma distribuição sobre Ω. De fato, desde que $\mathcal{D}^\alpha \varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ quando $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}^\alpha T$ é um funcional linear em $\mathbf{D}(\Omega)$, e claramente linear. Suponha que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathbf{D}(\Omega)$, então

$$supp(\mathcal{D}^\alpha(\varphi_n - \varphi) \subset supp(\varphi_n - \varphi) \subset K,$$

para algum compacto $K \subset \Omega$. Além disso, $\mathcal{D}^\beta(\mathcal{D}^\alpha(\varphi_n - \varphi)) = \mathcal{D}^{\beta+\alpha}(\varphi_n - \varphi)$ converge para zero uniformemente em K, quando $n \to \infty$, para cada multi-índices β. Portanto, $\mathcal{D}^\alpha \varphi_n \to \mathcal{D}^\alpha \varphi$ em $\mathbf{D}(\Omega)$. Desde que $T \in \mathbf{D}'(\Omega)$ segue

$$\mathcal{D}^\alpha T(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|} T \mathcal{D}^\alpha \varphi_n \to (-1)^{|\alpha|} T \mathcal{D}^\alpha \varphi = \mathcal{D} T(\varphi).$$

Portanto, $\mathcal{D}^\alpha T \in \mathbf{D}'(\Omega)$. Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim, as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Note que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^\alpha : \mathbf{D}'(\Omega) & \to & \mathbf{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & \mathcal{D}^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathbf{D}'(\Omega)$. Isto significa que, se $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ em $\mathbf{D}'(\Omega)$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}^\alpha T_n = \mathcal{D}^\alpha T$ em $\mathbf{D}'(\Omega)$.

O exemplo a seguir, nos mostra que a derivada de uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$ não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. Esse fato nos induz a definir uma classe de espaços de Banach de funções chamados de Espaços de Sobolev, que veremos mais adiante.

Exemplo 1.5. *Seja u uma função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma: $u(x) = 1$ se $x > 0$ e $u(x) = 0$ se $x < 0$. Note que ela pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Como mostra-se usando a definição de derivada*

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.6. *Se* $u \in C^k(\mathbb{R}^N)$ *para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *tal que* $|\alpha| \leq k$, *a derivada* $\mathcal{D}^\alpha u$, *no sentido das distribuições, é igual a derivada no sentido clássico, isto é,* $\mathcal{D}^\alpha T_u = T_{\mathcal{D}^\alpha u}$, *para todo* $|\alpha| \leq k$. *Para provar isto, usa-se a fórmula da integração de Gauss, basta notar que para todo* $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ *e* $u \in C^k(\mathbb{R}^N)$ *temos*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\mathcal{D}\varphi(x)dx &= \int_{supp(\varphi)} u(x)\mathcal{D}\varphi(x)dx \\
&= \int_{\partial(supp(\varphi))} (u\varphi)(x)dx - \int_{supp(\varphi)} \mathcal{D}u(x)\varphi(x)dx \\
&= -\int_{supp(\varphi)} \mathcal{D}u(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Isto implica que a derivada no sentido das distribuições de u é igual a derivada no sentido usual.

Exemplo 1.7. *Seja* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Suponha que para cada* $|\alpha| \leq k$, $\mathcal{D}^\alpha u$ *pertença a* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *Então, para cada* φ *em* $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ *e* $|\alpha| \leq k$, *tem-se*

$$\mathcal{D}^\alpha(\varphi * u) = \varphi * \mathcal{D}^\alpha u.$$

Sabendo que $\mathcal{D}^\alpha u$ *é a derivada no sentido das distribuições, a prova da igualdade acima é uma simples aplicação da definição de derivada no sentido clássico e do Teorema de Fubini (veja Teorema 1.12), a mesma já foi provada na Proposição 1.6.*

Utilizando a fórmula de Leibniz para funções, podemos mostrar que se $\rho \in C^\infty(\Omega)$ para cada $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$, o produto $\rho\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$, e se $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ em $\mathbf{D}(\Omega)$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\varphi_n = 0$ em $\mathbf{D}(\Omega)$. Quando T é uma distribuição sobre Ω, define-se o produto ρT como um funcional linear definido em $\mathbf{D}(\Omega)$ do seguinte modo

$$\langle \rho T, \varphi \rangle = \langle T, \rho\varphi \rangle, \text{ para todo } \varphi \in \mathbf{D}(\Omega).$$

Segue que ρT é uma distribuição sobre Ω.

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^N$, para calcular a derivada de ρT aplica-se a fórmula de Leibniz

$$\mathcal{D}^\alpha(\rho T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \mathcal{D}^\beta \rho \mathcal{D}^{\alpha-\beta} T.$$

Para verificar esta igualdade, é suficiente tomar $\alpha = e_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ e para todo $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ tem-se

$$\langle \mathcal{D}_i(\rho T), \varphi \rangle = -\langle \rho T, \mathcal{D}_i\varphi \rangle = -\langle T, \rho\mathcal{D}_i\varphi \rangle.$$

Note que

$$\mathcal{D}_i(\rho\varphi) = \rho\mathcal{D}_i(\varphi) + (\mathcal{D}_i\rho)\varphi \;\text{ e }\; \rho\mathcal{D}_i(\varphi) = \mathcal{D}_i(\rho\varphi) - (\mathcal{D}_i\rho)\varphi,$$

então

$$\begin{aligned} -\langle\, T, \rho\mathcal{D}_i\varphi\rangle &= \langle\, T, -\rho\mathcal{D}_i\varphi\rangle \\ &= \langle T, -\mathcal{D}_i(\rho\varphi) + (\mathcal{D}_i\rho)\varphi\rangle \\ &= -\langle T, \mathcal{D}_i(\rho\varphi)\rangle + \langle T, (\mathcal{D}_i\rho)\varphi\rangle \\ &= \langle \mathcal{D}_iT, \rho\varphi\rangle + \langle (\mathcal{D}_i\rho)T, \varphi\rangle \\ &= \langle \rho\mathcal{D}_iT, \varphi\rangle + \langle (\mathcal{D}_i\rho)T, \varphi\rangle \\ &= \langle \rho\mathcal{D}_iT + (\mathcal{D}_i\rho)T, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Suponha Ω e U subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$ tais que $\Omega \subset U$. Para cada função φ em $\mathbf{D}(\Omega)$ considere $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ se $x \in \Omega$ e $\tilde{\varphi}(x) = 0$ se $x \in U\backslash\Omega$. Segue que $\tilde{\varphi} \in \mathbf{D}(U)$ e mais

(a) $\mathcal{D}^\alpha\tilde{\varphi} = \widetilde{\mathcal{D}^\alpha\varphi}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$;

(b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ em $\mathbf{D}(\Omega)$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\varphi_n} = 0$ em $\mathbf{D}(U)$.

Se $T \in \mathbf{D}'(U)$, o funcional linear $T|_\Omega$ definido em $\mathbf{D}(\Omega)$ dada por $\langle T|_\Omega, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{\varphi}\rangle$ para todo φ em $\mathbf{D}(\Omega)$, é uma distribuição sobre Ω denominada restrição de T a Ω.

Note que $\mathcal{D}^\alpha(T|_\Omega) = (\mathcal{D}^\alpha T)|_\Omega$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$, e $T \in \mathbf{D}'(U)$. De fato,

$$\langle \mathcal{D}^\alpha T|_\Omega, \varphi\rangle = \langle \mathcal{D}^\alpha T, \tilde{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \mathcal{D}^\alpha\tilde{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \widetilde{\mathcal{D}^\alpha\varphi}\rangle = \langle \tilde{\mathcal{D}}^\alpha T, \varphi\rangle,$$

para todo φ em $\mathbf{D}(\Omega)$.

1.3 Distribuições temperadas

Nesta seção trataremos de uma classe especial de distribuições, chamadas de distribuições temperadas, usaremos esta classe de distribuições para definir a transformada de Fourier.

Definição 1.11. *Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ diz-se rapidamente decrescente no infinito, quando para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^2)^k |\mathcal{D}^\alpha\varphi(x)| < \infty,$$

o que é equivalente, a dizer que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} p(x)\mathcal{D}^\alpha\varphi(x) = 0$$

para todo polinômio p de N variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Considere $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ o espaço vetorial das funções rapidamente decrescentes no infinito com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, e munido da seguinte noção de convergência: uma sequência $\{\varphi_n\}$ de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge para zero, quando para todo $k \in \mathbb{N}$ a sequência $\{p_k(\varphi_n)\}$ converge para zero em $\mathbb{K}$.

A sequência $\{\varphi_n\}$ converge para φ, onde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, se $\{p_k(\varphi_n - \varphi)\}$ converge para zero em $\mathbb{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.12. *Os funcionais lineares definidos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, contínuas no sentido da convergência definida em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ são chamados de distribuições temperadas, e esse espaço vetorial é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Assim*

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \text{ se } \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Proposição 1.19. *O espaço das funções testes em $\mathbb{R}^N$, $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$, é um subespaço vetorial do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: De fato, seja $\theta \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\theta(x) = 1, \text{ se } \|x\| \leq 1 \text{ e } \theta(x) = 0, \text{ se } \|x\| \geq 2.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\theta_n(x) = \theta(\frac{x}{n})$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, então a sequência de funções $\{\theta_n u\}$ de $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ converge para u em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Para mostrar essa convergência usemos a fórmula de Leibniz para funções, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha(\theta_n(x)u(x)) - \mathcal{D}^\alpha u(x) &= \theta_n(x)\mathcal{D}^\alpha u(x) + (\mathcal{D}^\alpha\theta_n(x))u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(x) \\
&= \theta_n(x)\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(x) + (\mathcal{D}^\alpha\theta_n(x))u(x) \\
&= \theta_n(x)\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(x) \\
&+ \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta>0}} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\frac{1}{n^{|\beta|}}\mathcal{D}^\beta\theta\left(\frac{x}{n}\right)\mathcal{D}^\alpha u(x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_k(\theta_n u - u) &= \max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+\|x\|^2)^k|\theta_n(x)\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(x) \\ &+ \sum_{\beta\le\alpha,\beta>0}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\frac{1}{n^{|\beta|}}\mathcal{D}^\beta\theta\left(\frac{x}{n}\right)\mathcal{D}^\alpha u(x)| \\ &\le \max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+\|x\|^2)^k|\theta_n(x)\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(x)| \\ &+ \max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+\|x\|^2)^k|\sum_{\beta\le\alpha,\beta>0}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\frac{1}{n^{|\beta|}}\mathcal{D}^\beta\theta\left(\frac{x}{n}\right)\mathcal{D}^\alpha u(x)| \\ &\le \max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+\|x\|^2)^k|\theta_n(x)\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(x)| \\ &+ \max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+\|x\|^2)^k|\sum_{\beta\le\alpha,\beta>0}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\frac{1}{n^{|\beta|}}|\mathcal{D}^\beta\theta\left(\frac{x}{n}\right)\mathcal{D}^\alpha u(x)|. \end{aligned} \tag{1.18}$$

A primeira parcela converge para zero como consequência da definição de funções rapidamente decrescente no infinito e o fato de que $\theta_n(x)\mathcal{D}^\alpha u(x) = \mathcal{D}^\alpha u(x)$ para $\|x\| \le n$. E quando $n \to \infty$ a segunda parcela de (1.18) tende a zero também.

□

Observação 1.4. *Note que a função $u(x) = e^{-\|x\|^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ mas não pertence a $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$. De fato, basta notar que $\lim_{\|x\|\to\infty}\|x\|^k e^{-\|x\|^2} = 0$, onde $p_k(x) = \|x\|^k$ e $\alpha = (0,0,\ldots,0)$. Mas $u(x)$ não pertence a $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$, pois seja qual for $k > 0$, temos $u(x) > 0$, para todo x tal que $\|x\| > k$.*

Mas note que se T é uma distribuição temperada, então sua restrição a $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^N$, a qual ainda representamos por T. Além disto, se S é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^N$ tal que existe $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo a condição

$$|\langle S,\varphi\rangle| \le Cp_k(\varphi), \quad \text{para toda } \varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^N), \tag{1.19}$$

então, por $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ ser denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, segue que S pode ser estendida como uma distribuição temperada.

Exemplo 1.8. *Uma vez que $|\langle\delta_0,\varphi\rangle| \le p_0(\varphi)$, para toda $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$, segue de* (1.19) *que $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. De fato, basta notar que*

$$p_0(\varphi) = \max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+\|x\|^2)^0|\mathcal{D}^0\varphi(x)| = \max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\varphi(x)|,$$

ou seja,

$$|\langle\delta_0,\varphi\rangle| \le |\varphi(0)| \le \max_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|\varphi(x)|.$$

Exemplo 1.9. *Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$C = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{(1 + \|x\|^2)^k} dx < \infty,$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, então $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C p_k(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente u é uma distribuição temperada.

Exemplo 1.10. *Como consequência do Exemplo 1.9 e notando que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^m} dx < \infty, \text{ para todo } m > \frac{N}{2}, \tag{1.20}$$

segue que toda $u \in L^p(\mathbb{R}^N), 1 \leq p \leq \infty$, define uma distribuição temperada.

Observação 1.5. *As seguintes afirmações são verdadeiras para $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*

(i) $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ *é um subespaço vetorial denso em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *é um subespaço vetorial denso em* $L^q(\mathbb{R}^N)$;

(iii) $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ *é um subespaço vetorial denso em* $L^q(\mathbb{R}^N)$.

Então por dualidade resulta

(iv) $L^p(\mathbb{R}^N)$ *é um subespaço vetorial denso em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$;

(v) $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *é um subespaço vetorial denso em* $\mathbf{D}'(\mathbb{R}^N)$;

(vi) $L^p(\mathbb{R}^N)$ *é um subespaço vetorial denso em* $\mathbf{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Todos os itens são de fáceis demonstrações.

Exemplo 1.11. *Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$, então o funcional linear $\mathcal{D}^\alpha T$ é definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ por*

$$\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

é uma distribuição temperada.

Observação 1.6. *Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. O produto ρT não é necessariamente uma distribuição temperada.*

Definição 1.13. *Seja $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Diz-se que ρ é lentamente crescente no infinito, quando para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, existe um polinômio p_α, tal que*

$$|\mathcal{D}^\alpha \rho(x)| \leq p_\alpha(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Exemplo 1.12. *Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Se ρ é lentamente crescente no infinito, então ρT é uma distribuição temperada.*

1.4 Transformada de Fourier

Dada uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, define-se sua transformada de Fourier como sendo a $\mathcal{F}u$ definida no $\mathbb{R}^N$ por

$$(\mathcal{F}u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} u(y)dy, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_Ny_N$. Desde que $|e^{-i(x,y)}| = 1$, então

$$|(\mathcal{F}u)(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

ou seja, $\mathcal{F}u$ está bem definida.

Observação 1.7. *Também será usada a notação $\widehat{u}$ para a transformada de Fourier da função u. Usaremos as duas notações, ao longo do texto, para simplificar algumas expressões.*

Proposição 1.20. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(i) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $a \in \mathbb{K}$, então $\widehat{(au + v)} = a\widehat{u} + \widehat{v}$;

(ii) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$\widehat{(u * v)} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{u}\widehat{v};$$

(iii) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $x^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para $|\alpha| \leq k$, então $\widehat{u} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ e

$$\mathcal{D}^\alpha \widehat{u} = (\widehat{(-i)^{|\alpha|} x^\alpha u});$$

(iv) Se $u \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{D}^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para $|\alpha| \leq k$ e $\mathcal{D}^\alpha u \in C^0(\mathbb{R}^N)$ para $|\alpha| \leq k - 1$, então

$$\widehat{\mathcal{D}^\alpha u} = (ix)^\alpha \widehat{u};$$

(v) (Lema de Riemann-Lebesgue)$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^N)) \subset C^0(\mathbb{R}^N)$;

(vi) Se $(\tau_h u)(x) = u(x - h)$, então

$$\widehat{(\tau_h u)}(x) = e^{-i(x,h)} \widehat{u}(x),$$

além disso,

$$\tau_h \widehat{u} = \widehat{f},$$

onde $f(x) = e^{i(x,h)}u(x)$.

Prova: A prova do item (i) é imediata.

Para provar (ii), usaremos o teorema da mudança de variáveis (veja Teorema 1.14).

$$\begin{aligned}
\widehat{(u * v)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} (u * v)(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(y-x) dx dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} u(x)v(y-x) dx dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,x)} u(x) e^{-i(x,y-x)} v(y-x) dx dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,x)} u(x) dx \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y-x)} v(y-x) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,x)} u(x) dx \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,w)} v(w) dw \\
&= (2\pi)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,x)} u(x) dx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,w)} v(w) dw \right) \\
&= (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{u}\widehat{v}(x).
\end{aligned}$$

Para provar (iii), basta notar que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha \widehat{u}(x) &= \mathcal{D}^\alpha \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} u(y) dy \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{D}^\alpha \left(e^{-i(x,y)} u(y) \right) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} (-i)^{|\alpha|} y^\alpha e^{-i(x,y)} u(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} (-i)^{|\alpha|} y^\alpha u(y) dy \\
&= (\widehat{(-i)^{|\alpha|} x^\alpha u})(x).
\end{aligned}$$

Para provar (iv), primeiro considere $N = |\alpha| = 1$, desde que $u \in C^1$, temos

$$\widehat{u'(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x,y)} u'(y) dy,$$

usando o método de integração por partes, segue

$$\begin{aligned} \widehat{u'(x)} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(u(y)e^{-i(x,y)}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} (-ix)e^{-i(x,y)}u(y)dy \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(ix)\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x,y)}u(y)dy \\ &= ix\widehat{u}(x), \end{aligned}$$

onde $\widehat{u'(x)}$ é a derivada no sentido clássico da transformada de Fourier de u. O argumento para $N > 1$, $|\alpha| = 1$ é o mesmo, só que calcula-se $\widehat{\partial_j u}$ integrando com respeito a $j-$ésima variável e para o caso geral, segue por indução sobre $|\alpha|$.

Para provar (v), considere $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e uma sequência $\{u_n\} \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap C_0(\mathbb{R}^N)$, desde que $C_0(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{u_n} \to \widehat{u}$ uniformemente quando $u_n \to u$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Uma vez que $C^0(\mathbb{R}^N)$ é fechado na norma da convergência uniforme, tem-se que $\widehat{u} \in C^0(\mathbb{R}^N)$.

Para provar (vi), aplica-se a transformada de Fourier em $u(x-h)$, como segue

$$\widehat{(\tau_h u)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)}u(y-h)dy.$$

Considerando $y - h = w$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{(\tau_h u)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,w+h)}u(w)dw \\ &= e^{-i(x,h)}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,w)}u(w)dw \\ &= e^{-i(x,h)}\widehat{u}(x). \end{aligned}$$

Similarmente, temos

$$\begin{aligned} \tau_h(\widehat{u}(x)) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x-h,y)}u(y)dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)}e^{i(h,y)}u(y)dy \\ &= \widehat{f}(x), \end{aligned}$$

onde $f(x) = e^{i(h,x)}u(x)$.

□

Observação 1.8. *Desde que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, estão bem definidas $\mathcal{F}\varphi$ e $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ e mostra-se que elas são rapidamente decrescentes no infinito. Além disso*

$$\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

são isomorfismos contínuos. Antes de mostrarmos esses isomorfismos apresentaremos dois resultados.

(1) $\mathcal{F}(\mathcal{D}^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathcal{F}\varphi$;

(2) $\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|}x^\alpha\varphi)$.

As provas são similares às provas da Proposição 1.20.

Lema 1.21. *Se* $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *é definida por* $\varphi_0(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$, *então* $\mathcal{F}\varphi_0 = \varphi_0$.

Prova: Seja α uma lista cujas entradas são iguais a zero, exceto $j-$ésima entrada que é igual a 1. Segue que

$$\mathcal{D}^\alpha\varphi_0(x) = \mathcal{D}_j\varphi_0(x) = -x_j\varphi_0(x) = -x^\alpha\varphi_0(x),$$

multiplicando ambos os lados por i, temos

$$\mathcal{D}^\alpha\varphi_0(x)i = -ix^\alpha\varphi_0(x),$$

aplicando a transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{D}^\alpha\varphi_0(x)i\right) = \mathcal{F}(-ix^\alpha\varphi_0(x)),$$

aplicando a propriedade (iii) e (iv) da Proposição 1.20, segue

$$-x\mathcal{F}(\varphi_0)(x) = \mathcal{D}^\alpha\mathcal{F}(\varphi_0)(x)$$

ou seja

$$\frac{\mathcal{D}^\alpha\mathcal{F}\varphi_0(x)}{\mathcal{F}(\varphi_0)(x)} = -x,$$

integrando ambos os lados, segue

$$ln(\mathcal{F}(\varphi_0)) = \frac{-\|x\|^2}{2} + c_1,$$

aplicando a função exponencial, resulta

$$\mathcal{F}(\varphi_0) = Ce^{\frac{-\|x\|^2}{2}}.$$

Então, para $x=0$ temos

$$C = \mathcal{F}(\varphi_0)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(y,0)}e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}dy$$

Fazendo $w = \frac{y}{\sqrt{2}}$, então $dw = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}dy$, isto é, $2^{\frac{N}{2}}dw = dy$.

$$C = \frac{2^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-w^2} dw = \frac{2^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \pi^{\frac{N}{2}} = 1.$$

Portanto,

$$\mathcal{F}\varphi_0 = \varphi_0.$$

$\square$

Teorema 1.22. *Seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e vale a fórmula de inversão*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)} \widehat{u}(y) dy, \;\; \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.21}$$

e dados $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u} v dy = \int_{\mathbb{R}^N} u \widehat{v} dy. \tag{1.22}$$

Prova: Sejam $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, pelo item (2) da Observação 1.8, sabemos que $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e juntamente com o item (1) da Observação 1.8 e o item (iv) da Proposição 1.20 para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$,

$$\begin{array}{rcl} |x^\alpha \mathcal{D}^\beta \widehat{u}(x)| & = & |x^\alpha (-i)^{|\beta|} \widehat{(x^\beta u)}(x)| \\ & = & |(-i)^{|\beta|} (-i^2)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{(x^\beta u)}(x)| \\ & = & |(-i)^{|\alpha+\beta|} i^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{(x^\beta u)}(x)| \\ & = & |\widehat{(\mathcal{D}^\alpha (x^\beta u)}(x))| \\ & \leq & (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|\mathcal{D}^\alpha (x^\beta u)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \end{array}$$

logo, pela Definição 1.11, $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Desde que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(x)v(y)e^{-i(y,\lambda x)}$ é mensurável, aplicando a desigualdade de Minkowski[6], temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\widehat{v}(\lambda x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \int_{\mathbb{R}^N} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} v(y) e^{-i(y,\lambda x)} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} v(y) (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-i(\lambda y, x)} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\lambda y) v(y) dy,
\end{aligned}$$

o que prova (1.22), pela igualdade acima ainda temos

$$\begin{aligned}
u(0) \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{v}(x) dx &= \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \widehat{v}(x) dx \\
&= \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} v\left(\frac{x}{\lambda}\right) \widehat{u}(x) dx \\
&= v(0) \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(x) dx.
\end{aligned}$$

Tomando $v(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ na igualdade anterior, temos

$$u(0) \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(x) dx,$$

ou seja,

$$u(0) \;=\; (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(x) dx,$$

usando o item (v) da Proposição 1.20

$$\begin{aligned}
u(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(0) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi,
\end{aligned}$$

o que prova (1.21).

□

[6]

Teorema 1.23 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam f e g funções de $L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então $f+g$ é uma função de $L^p(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\|f+g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Prova: Ver [4], p.93, Teorema 4.7.

□

Considere o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \\ u &\mapsto \mathcal{G}(u) = \check{u}, \end{aligned}$$

onde para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \check{u}$ está definido por

$$\check{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)} u(y) dy, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

pela fórmula de inversão, temos

$$u(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(y)^{i(x,y)} dy = (\check{\widehat{u}})(x)$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{(\check{u})}(x) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \check{u}(y) e^{-i(x,y)} dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(-y) e^{i(x,-y)} dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(y) e^{i(x,y)} dy \\ &= u(x), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{G}$ é a inversa da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

A aplicação

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)} u(y) dy, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

é denominada transformada de Fourier inversa de u. Desde que $|e^{i(x,y)}| = 1$, então

$$|(\mathcal{F}^{-1}u)(x)| \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

ou seja, $\mathcal{F}^{-1}u$ também está bem definida.

Observação 1.9. *Também será usada a notação $\check{u}$ para a transformada de Fourier inversa.*

Observação 1.10. *Observe que $\overline{\mathcal{F}u} = \mathcal{F}^{-1}\overline{u}$, sendo $\overline{v}$ o conjugado complexo de v. De* *fato,*

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}u}(x) &= \overline{\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)}u(y)dy\right)}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \overline{e^{-i(x,y)}u(y)}dy\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)}\overline{u(y)}dy\\
&= \mathcal{F}^{-1}\overline{u}(x).
\end{aligned}
$$

Agora podemos enunciar o teorema seguinte.

Teorema 1.24. *A restrição da transformada de Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *é um isomorfismo e* $\mathcal{F}^{-1}$ *é dado por*

$$
\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = (\mathcal{F}^{-1}u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)}u(y)dy, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^N.
$$

Dada uma distribuição temperada T, definimos a sua transformada de Fourier do seguinte modo

$$
\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle, \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)
$$

e

$$
\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle, \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).
$$

Usando a continuidade da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, segue que $\mathcal{F}T$ e $\mathcal{F}^{-1}T$ são distribuições temperadas. Temos que

$$
\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)
$$

são isomorfismos contínuos sendo $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$. Observe que para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tem-se

(1) $\mathcal{F}(\mathcal{D}^\alpha T) = i^{|\alpha|}x^\alpha \mathcal{F}T$;

(2) $\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|}x^\alpha T)$.

Teorema 1.25 (Teorema de Plancherel)**.** *Se* $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$*, então a transformada de Fourier* $\widehat{T}u$ *de* Tu *é definida pela função* $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$*, isto é,*

$$
\langle \widehat{T}, u\rangle = \langle T, \widehat{u}\rangle, \quad \textit{para todo } u \in L^2(\mathbb{R}^N)
$$

e

$$
\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
$$

Prova: Pela desigualdade de Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{T}_u, \varphi \rangle &= |\langle T_u, \widehat{\varphi} \rangle| \\ &= |\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\widehat{\varphi} dx| \\ &\leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Segue do teorema da representação de Riesz para espaços de Hilbert, que existe uma $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\langle \widehat{T}_u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\widehat{u}(x) dx = \langle T_{\widehat{u}}, \varphi \rangle,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\widehat{\varphi}(x) dx, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, de (1.23) temos $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ desde que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ seja denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo

$$\|\widehat{\widehat{u}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Por outro lado, sabemos que $\widehat{\widehat{u}} = \check{u}$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\widehat{u}}(x)\varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(x)\widehat{u}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(-x)\varphi(x) dx, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\widehat{\widehat{u}}(x) = u(-x) = \check{u}(x) \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Logo, $\|\widehat{\widehat{u}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, segue que

$$\|\widehat{\widehat{u}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Portanto,

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

$\square$

Corolário 1.26. *Sejam* $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, *se*

$$(\mathcal{F}u_n)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\|x\| \leq n} e^{-i(x,y)} u(y)dy, \quad \textit{para todos } x \in \mathbb{R}^N \quad \textit{e} \quad n \in \mathbb{N},$$

então $\mathcal{F}u = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n)$ *pontualmente em* $\mathbb{R}^N$.

Prova: Fixe $u_n(x) = u(x)$ ou $u_n(x) = 0$ de acordo com $|x| \leq n$ ou $|x| > n$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$, pelo teorema de Plancherel $\lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{u_n} - \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$, ou seja,

$$\mathcal{F}u = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}u_n \ \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Mas como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u_n}(x)\varphi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u_n(x)\widehat{u}(x)dx \\ &= \int_{|x|\leq n} u(x) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} u(y)dy \right\} dx. \end{aligned}$$

Mudando a ordem de integração, temos

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \int_{\|x\|\leq n} u(x) e^{-i(x,y)} dx \right\} u(y)dy$$

é integrável sobre $|x| \leq n$, como pode ser visto pela desigualdade de Schwarz. Logo

$$\widehat{u_n}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\|x\|\leq n} e^{-i(x,y)} u(y)dy \ \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{u_n}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} u(y)dy = \widehat{u}(x),$$

o que prova o corolário.

$\square$

1.5 Espaços de Sobolev

Nesta seção são apresentadas algumas propriedades elementares da geometria dos espaços de Sobolev com suas respectivas referências de demonstrações, e alguns resultados simples de dualidade. Como pode ser visto com maiores detalhes em [1, 11].

Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Vimos que se $u \in L^p(\Omega)$, então u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas que nem sempre $\mathcal{D}^\alpha u$ é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $\mathcal{D}^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev.

O espaço de Sobolev, representado por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ onde $|\alpha| \leq m$, $\mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $\mathcal{D}^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de u por

$$\|u\|_{m,p} \quad = \quad \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{quando } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} \quad = \quad \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess |\mathcal{D}^\alpha u(x)|, \quad \text{quando } p = \infty.$$

Não é difícil verificar que a função $\|\cdot\| : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, é uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$.

Proposição 1.27. *O espaço de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Prova: Ver [11], p. 24, Proposição 2.2.1.

□

Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$ e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Segundo [11], $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar dado por

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (\mathcal{D}^\alpha u, \overline{\mathcal{D}^\alpha} v)_{L^2(\Omega)},$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$.

Quando $m = 0$, claramente temos $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e do Teorema 1.16, sabe-se que $\mathbf{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $\mathbf{D}(\Omega)$ seja sempre denso em $W^{0,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$, para maiores detalhes veja [11]. Motivado por este fato, define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathbf{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, escreve-se $H^0(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.28. *Seja $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e $\tilde{u}$ a extensão de u por zero fora de Ω. Tem-se*

(a) $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$;

(b) $\mathcal{D}^\alpha \tilde{u} = \widetilde{\mathcal{D}^\alpha u}$ *para todo* $|\alpha| \leq m$;

(c) $\|u\|_{m,p} = \|\tilde{u}\|_{m,p}$.

Prova: Ver [11], p. 25, Proposição 2.2.2.

$\square$

Proposição 1.29. *Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω no $\mathbb{R}^N$, Ω^c possui medida de Lebesgue igual a zero.*

Prova: Ver [11], p. 26, Proposição 2.2.3.

$\square$

Teorema 1.30. *O espaço vetorial $\mathbf{D}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: Ver [11], p. 27, Teorema 2.2.1.

$\square$

Proposição 1.31. *Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e possui suporte compacto, então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Prova: Ver [11], p. 29, Proposição 2.2.4.

$\square$

Apresentaremos o seguinte teorema sobre reflexividade dos espaços de Sobolev.

Teorema 1.32. *Se $1 < p < \infty$ então $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.*

Prova: Ver [11], p. 33, Teorema 2.2.3.

$\square$

Para apresentar alguns resultados sobre os espaços $H_0^m(\Omega)$, [11] considera os seguinte operador.

Seja L o operador diferencial $\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^{2\alpha}$, resulta que para $u \in H^m(\Omega)$, Lu é uma distribuição não necessariamente definida por uma função localmente integrável. Além disso, se $u \in H^m(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$, então $g_\alpha = \mathcal{D}^\alpha u$ pertence a $L^2(\Omega)$ e

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^\alpha g_\alpha \in H^{-m}(\Omega),$$

pelo Teorema 1.32. Logo, pode-se considerar L como um operador linear de $H^m(\Omega)$ em $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.33. *O complemento ortogonal e $H_0^m(\Omega)$ em $H^0(\Omega)$ é o núcleo do operador diferencial linear L.*

Prova: Ver [11], p. 34, Proposição 2.2.5.

□

Proposição 1.34. *O operador L transforma $H_0^m(\Omega)$ sobre $H^{-m}(\Omega)$ de maneira isométrica.*

Prova: Ver [11], p. 35, Proposição 2.2.6.

□

Para finalizar este capítulo apresentaremos a caracterização dos espaços $H^m(\mathbb{R}^N)$, para m inteiro e positivo. Observe que agora trataremos Ω como sendo todo $\mathbb{R}^N$.

Considere a função $J_m(x) = (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}$, onde $x \in \mathbb{R}^N$. Note que $J_m(x)$ é uma função lentamente crescente no infinito, pela Definição 1.13.

Proposição 1.35. *O espaço $H^m(\mathbb{R}^N)$ coincide com*

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Definindo

$$|||u|||_m = \|(1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

a aplicação

$$\begin{array}{rcl} H^m(\mathbb{R}^N) & \to & \mathbb{R}^+ \\ u & \mapsto & |||u|||_m \end{array}$$

é uma norma equivalente à norma usual nos espaços de Sobolev $\|u\|_m$.

Prova: Para provar a equivalência das normas, primeiro provaremos que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \sum_{|\alpha| \leq m} x^{2\alpha} \leq (1 + \|x\|^2)^m \leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq m} x^{2\alpha}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.24}$$

De fato, usando o Binômio de Newton, mostra-se que

$$(1 + \|x\|^2)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \|x\|^{2j} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2)^j. \tag{1.25}$$

Afirmamos que, ao fixar j, temos

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2)^j = \sum_{|\alpha|=j} C_\alpha x^{2\alpha}.$$

Para isto, basta aplicar novamente o Binômio de Newton.

$$\begin{aligned}
& (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2)^j \\
= & \sum_{i_1=0}^{j} \binom{j}{i_1} x_1^{2i_1} (x_2^2 + x_3^2 \ldots + x_N^2)^{j-i_1} \\
= & \sum_{i_1=0}^{j} \binom{j}{i_1} x_1^{2i_1} \sum_{i_2=0}^{j-i_1} \binom{j-i_1}{i_2} x_2^{2i_2} \sum_{i_3=0}^{j-i_2-i_1} \binom{j-i_1-i_2}{i_3} x_3^{2i_3} \ldots \\
\ldots & \sum_{i_N=0}^{j-i_{N-2}\ldots-i_1} \binom{j-i_{N-2}\ldots-i_1}{i_{N-1}} x_{N-1}^{2i_{N-1}} x_N^{2(j-i_{N-1}-i_{N-2}\ldots-i_1)}.
\end{aligned}$$

Como as somas são finitas, temos

$$\begin{aligned}
& (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2)^j \\
= & \sum_{i_1=0}^{j} \binom{j}{i_1} \sum_{i_2=0}^{j-i_1} \binom{j-i_1}{i_2} \sum_{i_3=0}^{j-i_2-i_1} \binom{j-i_2-i_1}{i_3} \ldots \sum_{i_N=0}^{j-i_{N-2}\ldots-i_1} \binom{j-i_{N-2}\ldots-i_1}{i_{N-1}} \\
& x_1^{2i_1} x_2^{2i_2} x_3^{2i_3} \ldots x_{N-1}^{2i_{N-1}} x_N^{2(j-i_{N-1}-i_{N-2}\ldots-i_1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \sum_{i_1=0}^{j} \sum_{i_2=0}^{j-i_1} \sum_{i_3=0}^{j-i_2-i_1} \ldots \sum_{i_N=0}^{j-i_{N-2}\ldots-i_1} \binom{j}{i_1} \binom{j-i_1}{i_2} \binom{j-i_2-i_1}{i_3} \ldots \binom{j-i_{N-2}\ldots-i_1}{i_{N-1}} \\
& x_1^{2i_1} x_2^{2i_2} x_3^{2i_3} \ldots x_{N-1}^{2i_{N-1}} x_N^{2(j-i_{N-1}-i_{N-2}\ldots-i_1)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i_1=0}^{j} \sum_{i_2=0}^{j-i_1} \sum_{i_3=0}^{j-i_2-i_1} \ldots \sum_{i_N=0}^{j-i_{N-2}\ldots-i_1} \left(\frac{j!}{i_1! i_2! \ldots i_N!} \right) x_1^{2i_1} x_2^{2i_2} x_3^{2i_3} \ldots x_{N-1}^{2i_{N-1}} x_N^{2(j-i_{N-1}-i_{N-2}\ldots-i_1)}.$$

Fazendo $\alpha = (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{N-1}, j - i_{N-1} - i_{N-2} \ldots - i_1)$, segue que $|\alpha| = j$. Logo

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2)^j = \sum_{|\alpha|=j} \left(\frac{j!}{i_1! i_2! \ldots i_N!} \right) x^{2\alpha}.$$

Voltando à equação (1.25)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2)^j &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\sum_{|\alpha|=j}\left(\frac{j!}{i_1!i_2!\ldots i_N!}\right)x^{2\alpha}\\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{j!}{i_1!i_2!\ldots i_N!}\right)\sum_{|\alpha|=j}x^{2\alpha}\\
&= \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{m!}{(m-j)!i_1!i_2!\ldots i_N!}\right)\sum_{|\alpha|=j}x^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Tome $\dfrac{C_1}{m}=\min\limits_{j\in\{0,\ldots,m\}}\left\{\left(\dfrac{m!}{(m-j)!i_1!i_2!\ldots i_N!}\right)\right\}$ e $\dfrac{C_2}{m}=\max\limits_{j\in\{0,\ldots,m\}}\left\{\left(\dfrac{m!}{(m-j)!i_1!i_2!\ldots i_N!}\right)\right\}$, com isto, prova-se a desigualdade (1.24).

Voltando à prova da proposição, observe que $H^m(\mathbb{R}^N)$ é um subespaço denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$ que por sua vez um subespaço denso em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Seja $u\in H^m(\mathbb{R}^N)$, para todo α tal que $|\alpha|\le m$, temos a seguinte propriedade da transformada de Fourier.

$$\widehat{\mathcal{D}^\alpha u(x)}=(ix)^\alpha\widehat{u}(x) \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N. \tag{1.26}$$

Usando essa propriedade e a desigualdade (1.24), segue

$$\begin{aligned}
|||u||_m^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+\|x\|^2)^m|\widehat{u}(x)|^2dx\\
&\le C_2\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\mathbb{R}^N}|x^\alpha\widehat{u}(x)|^2dx\\
&\le C_2\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{\mathcal{D}^\alpha u(x)}|^2dx\\
&\le C_2\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\mathbb{R}^N}|\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2dx\\
&= C_2\|u\|_m^2.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $J_m\widehat{u}\in L^2(\mathbb{R}^N)$, então da desigualdade (1.24) resulta que para todo $|\alpha|\le m$, $(ix)^\alpha\widehat{u}\in L^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $\widehat{\mathcal{D}^\alpha u}\in L^2(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema 1.25

$\mathcal{D}^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e, além disso,

$$\begin{aligned}
\|u\|_m^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^N} |x^\alpha \widehat{u}(x)|^2 dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^N} x^{2\alpha} |\widehat{u}(x)|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{C_1 \||u\||_m^2},
\end{aligned}$$

o que demonstra a proposição.

$\square$

Capítulo 2

Semigrupos de operadores lineares e limitados

A teoria de C_0-semigrupos de operadores lineares e limitados serve para descrever a evolução temporal de sistemas autônomos lineares. O objetivo deste capítulo é introduzir a noção de C_0-semigrupos lineares, seus geradores infinitesimais e algumas de suas propriedades básicas. Também fornecer alguns fatos fundamentais relativos a operadores lineares, bem como a integração e diferenciação, em algum sentido, de funções de uma variável do corpo $\mathbb{K}$ tomando valores em algum espaço de Banach. Para maiores detalhes, veja [2, 4, 10, 12, 13, 14, 15].

Seja X um espaço de Banach. Considere $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$ um operador linear(não necessariamente limitado), $u_0 \in D(\mathcal{A})$ e o problema de valor inicial para uma equação diferencial linear autônoma em $[0, \infty)$,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathcal{A}u, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Supondo que o problema (2.1) possui uma única solução global, em algum sentido, isto é, existe uma única aplicação $u : [0, \infty) \to X$ tal que $u(t) \in D(\mathcal{A})$ para todo $t \geq 0$, vale a equação

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{A}u,$$

em algum sentido para todo $t \geq 0$ e $u(0) = u_0$. O semigrupo linear associado a (2.1) é o seu operador solução, isto é, o semigrupo linear é uma família de operadores lineares limitados definidos em X e tomando valores em X dada por $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, onde $u(t) := T(t)u_0$, para todo $t \geq 0$.

Em geral, X é um espaço de funções e o operador linear $\mathcal{A}$ é um operador linear diferencial.

2.1 Semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares e limitados

No que segue, X denota um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) com norma $\|.\|_X$ e $\mathcal{L}(X)$ denota o espaço de todos os operadores lineares e limitados de X em X, munido da norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} := \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in X}} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X}.$$

Definição 2.1. *Uma família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares e limitados de X em X é um semigrupo de operadores lineares e limitados em X quando*

(i) $T(0) = I$, *(onde I é o operador identidade em X);*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para todos* $t, s \geq 0$.

Um semigrupo de operadores lineares e limitados $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é uniformemente contínuo quando

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$

Definição 2.2. *O operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$ definido no domínio*

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X; \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \, \textit{existe} \right\}$$

pela lei de formação

$$\mathcal{A}x = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} := \left. \frac{d^+T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \textit{para todo } x \in D(\mathcal{A})$$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Note que se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de um operador linear e limitado, então

$$\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

De fato, tome $s = t + h$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \lim_{h\to 0^+} \|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \|T(t)T(h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \|T(t)(T(h) - I)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \lim_{h\to 0^+} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(h) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \lim_{h\to 0^+} \|T(h) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.
\end{aligned}$$

Antes de enunciarmos e demonstrarmos um teorema que nos dá condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo, é conveniente definirmos a integral de Riemann de um semigrupo uniformemente contínuo.

Definição 2.3. *Considere o intervalo* $[a,b]$, *com* $0 \leq a < b < +\infty$, *e seja* $P = (t_0, t_1, \ldots, t_N) \in \mathcal{P}_a^b$, *com* $t_0 = a$ *e* $t_N = b$, *onde* $\mathcal{P}_a^b$ *é o conjunto de todas as partições finitas do intervalo* $[a,b]$. *Assim, para um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares e limitados* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, *definimos*

$$S(P;T) = \sum_{k=1}^{N} (t_k - t_{k-1}) T(t_{k-1}).$$

Desta forma, a integral de Riemman do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é dada por*

$$\int_a^b T(t)dt = \lim_{|P|\to 0} S(P;T),$$

onde $P \in \mathcal{P}_a^b$ *e* $|P| = \max_{k=1,\ldots,N} (t_k - t_{k-1})$.

Como o semigrupo é uniformemente contínuo, então não é difícil mostrar que o limite acima existe. Portanto, $\int_a^b T(t)dt$ é limitada. É possível provar que se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ são semigrupos uniformemente contínuos e $\mathcal{A}$ é um operador linear e limitado, então

$$\int_a^b [\mathcal{A}T(t) + S(t)]\, dt = \mathcal{A}\int_a^b T(t)dt + \int_a^b S(t)dt.$$

Mostraremos mais adiante, no Teorema 2.8,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)ds = T(t) \ \text{ para todo } t \geq 0.$$

Lema 2.1. *Seja* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$ *tal que* $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, *então* $I - \mathcal{A}$ *é invertível.*

Prova: De fato, defina

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C},\ z \neq 1.$$

Note que f é analítica em $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, logo, como $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, temos que $f(\mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ é um operador linear limitado em X, isto é, $f(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(X)$. Além disso, $\mathcal{A}$ comuta com qualquer uma de suas potências, então

$$(I-\mathcal{A})f(\mathcal{A}) \ = \ (I-\mathcal{A})\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}^n = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}^n - \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}^n(I-\mathcal{A}) = I.$$

Portanto, $I - \mathcal{A}$ é invertível e $f(\mathcal{A}) = (I - \mathcal{A})^{-1}$.

$\square$

Teorema 2.2. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se $\mathcal{A}$ é um operador linear e limitado.*

Prova: Sejam $\mathcal{A}$ um operador linear limitado em X e o operador $T(t) = e^{t\mathcal{A}}$, onde

$$e^{t\mathcal{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathcal{A}^n}{n!} \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{2.2}$$

Antes de demonstrar o teorema, é importante notar o seguinte fato

$$\left\| e^{t\mathcal{A}} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}} \tag{2.3}$$

De fato, sabemos que

$$\frac{\|(t\mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \leq \frac{t^n \|\mathcal{A}\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!}, \tag{2.4}$$

então defina as somas parciais $S_N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \frac{\|(t\mathcal{A})^j\|_{\mathcal{L}(X)}}{j!}$ e $P_N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \frac{t^j \|\mathcal{A}\|^j_{\mathcal{L}(X)}}{j!}$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Por (2.4) temos que $S_N \leq P_N$, para todo $N \in \mathbb{N}$, e isto implica que

$$\lim_{N\to\infty} S_N \leq \lim_{N\to\infty} P_N,$$

o que prova (2.3).

O lado direito de (2.2) converge para todo $t \geq 0$ e define para cada t, um operador linear limitado $T(t)$, pois estamos considerando $\mathcal{A}$ limitado. Além disso

(i) $T(0) = I$, (onde I é o operador identidade em X);

(ii) $T(t+s) = e^{\mathcal{A}(t+s)} = e^{\mathcal{A}t}e^{\mathcal{A}s} = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$;

(iii) $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ quando $t \to 0^+$.

Também pode ser usado a expansão em séries de potências para ver (i) e (ii), já para mostrar (iii), note o seguinte

$$\begin{aligned}
\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}^k}{k!} \\
&= t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}^{k-1}}{k!} \\
&\leq t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)} e^{t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $t \to 0^+$. Então, por definição, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares e limitados em X. Além disso, o operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal deste semigrupo. De fato, quando $t \to 0^+$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t)-I}{t} - \mathcal{A} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \frac{1}{t} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n \mathcal{A}^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} \\
&= \frac{1}{t} \left(e^{t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}} - 1 - t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \\
&= \frac{e^{t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}} - 1}{t} - \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0.
\end{aligned}$$

Portanto, se $\mathcal{A}$ é um operador linear e limitado, então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo em X onde $\mathcal{A}$ é seu gerador infinitesimal.

Para provar a recíproca usaremos o Lema 2.1. Fixe um $\rho > 0$, pequeno o suficiente, tal que $\left\| I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s)ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Então, pelo Lema 2.1, temos que $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s)ds$ é invertível, em particular, $\int_0^\rho T(s)ds$ é invertível. Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^\rho T(s)ds &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\rho T(h)T(s) - T(s)ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{h}\left(T(h)-I\right)=\frac{1}{h}\left(\int_{\rho}^{\rho+h}T(s)ds-\int_0^h T(s)ds\right)\left(\int_0^{\rho}T(s)ds\right)^{-1}, \tag{2.5}$$

e passando o limite em (2.5) quando $h\to 0^+$, $h^{-1}\left(T(h)-I\right)$ converge em norma, e consequentemente converge forte para o operador linear e limitado $(T(\rho)-I)\left(\int_0^{\rho}T(s)ds\right)^{-1}$ e que é, por definição, o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

□

Teorema 2.3. *Sejam $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupos uniformemente contínuos de um operadores lineares e limitados. Se*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t}=\mathcal{A}=\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)-I}{t}, \tag{2.6}$$

então $T(t)=S(t)$ para todo $t\geq 0$.

Prova: Vamos mostrar que dado $P>0$, temos $S(t)=T(t)$ para todo $0\leq t\leq P$. Fixado $P>0$ e sabendo que as funções $t\mapsto \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $t\mapsto \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ são contínuas, existe $C>0$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\leq C$ para todo $0\leq s,t\leq P$. Dado um $\epsilon>0$, segue de (2.6) que existe $\delta>0$ tal que

$$\frac{\|T(h)-S(h)\|_{\mathcal{L}(X)}}{h}<\frac{\epsilon}{PC},\ \text{para todo } 0<h<\delta. \tag{2.7}$$

Seja $0\leq t\leq P$ e escolha $n\geq 1$ tal que $\frac{t}{n}<\delta$. Usando os itens (ii) e (iii) da Definição 2.1, e (2.7), segue

$$\begin{aligned}
\|T(t)-S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\|T\left(n\frac{t}{n}\right)-S\left(n\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leq\ & \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right)-T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left((k+1)\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leq\ & \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\left((n-k-1+1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right)-T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right)S\left(\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leq\ & \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)T\left(\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right)-T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right)S\left(\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leq\ & \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|S\left(\frac{kt}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\
\leq\ & Cn\frac{\epsilon}{PC}\frac{t}{n}\leq\epsilon,
\end{aligned}$$

isto prova que $S(t)=T(t)$, seja qual for $0\leq t\leq P$.

□

Corolário 2.4. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares e limitados. Então*

(a) Existe um único operador linear e limitado $\mathcal{A}$ tal que $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$, e além disso, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$;

(b) Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$;

(c) A aplicação $[0, +\infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é diferenciável na norma e

$$\left.\frac{d^+T(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mathcal{A}T(t) = T(t)\mathcal{A}.$$

Prova: A prova do item (a) segue do fato de que se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal dos semigrupos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, e como $\mathcal{A}$ já é o gerador infinitesimal $e^{t\mathcal{A}}$, pelo Teorema 2.3 segue que $e^{t\mathcal{A}} = T(t)$. A prova do item (b) segue da inequação (2.3), onde basta tomar $\omega = \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X)}$. A prova do item (c) segue do fato de que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}T(t) &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t) \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)T(t)-T(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h+t)-T(t)}{h} = \left.\frac{d^+T(t)}{dt}\right|_{t=0},
\end{aligned}$$

analogamente, $T(t)\mathcal{A} = \left.\dfrac{d^+T(t)}{dt}\right|_{t=0}$.

□

2.2 Semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares e limitados

Definição 2.4. *Um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares e limitados de X em X é dito semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares e limitados se*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares e limitados de X em X pode ser chamado de semigrupo de classe C_0 ou C_0-semigrupo.

Observação 2.1. *Todo semigrupo de operadores lineares e limitados em um espaço de Banach X que é uniformemente contínuo é com maior razão fortemente contínuo. Mas a recíproca não é válida, como veremos em alguns exemplos.*

Exemplo 2.1. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são números complexos. O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mathcal{A}x, t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

possui uma única solução em $[0, +\infty)$ dada por

$$x(t) = e^{t\mathcal{A}}x_0, \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde $e^{t\mathcal{A}}$ é a matriz

$$e^{t\mathcal{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathcal{A})^k}{k!}.$$

Assim, o problema (2.8) está associado a um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, espaço das matrizes de n linhas e uma coluna de entradas complexas, onde

$$T(t) = e^{\mathcal{A}t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Além disso, é possível notar que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo.

Em particular, quando $n = 2$ e $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, isto é,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

onde $\delta = ad - bc$, $\tau = a + d$ e $\gamma^2 = \frac{1}{4}(\tau^2 - 4\delta)$, e temos o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ dado pela matriz

$$e^{t\mathcal{A}} = \begin{cases} e^{\frac{t\tau}{2}} \left[\frac{1}{\gamma}\sinh(t\gamma)\mathcal{A} + (\cosh(t\gamma) - \frac{\tau}{2\gamma}\sinh(t\gamma))I_2\right] & se \quad \gamma \neq 0 \\ e^{\frac{t\tau}{2}} \left[t\mathcal{A} + (1 - \frac{t\tau}{2})I_2\right] & se \quad \gamma = 0, \end{cases}$$

onde

$$\sinh(t\gamma) = \frac{e^{t\gamma} - e^{-t\gamma}}{2} \quad e \quad \cosh(t\gamma) = \frac{e^{t\gamma} + e^{-t\gamma}}{2}.$$

De fato, para $\gamma \neq 0$ usaremos o processo de diagonalização de matrizes, visto que o polinômio característico $p(\lambda) = det(\mathcal{A} - \lambda I_2)$ da matriz $\mathcal{A}$ possui duas raízes distintas *e as raízes são dadas pela equação*

$$(a-\lambda)(b-\lambda)-cd=0,$$

ou seja, $\lambda=\frac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\delta}}{2}$, *então*

$$\lambda_1=\frac{\tau-\sqrt{\tau^2-4\delta}}{2} \ \ e\ \lambda_2=\frac{\tau+\sqrt{\tau^2-4\delta}}{2}$$

Calculando o autovetor associado ao autovalor λ_1.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

segue que

$$(a-\lambda_1)x+by=0 \quad e \quad cx+(d-\lambda_1)y=0.$$

Suponha $c\neq 0$, *então*

$$x=\frac{(\lambda_1-d)y}{c},$$

e para $y=1$ *temos que*

$$x=\frac{\frac{\tau-\sqrt{\tau^2-4\delta}}{2}-d}{c}=\frac{a-d-\sqrt{\tau^2-4\delta}}{2c}.$$

Analogamente, encontra-se o autovetor associado ao autovalor λ_2, $\left(\frac{a-d+\sqrt{\tau^2-4\delta}}{2c},1\right)$. *Agora, escrevemos* $\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{B}^{-1}$ *onde* $\mathcal{B}$ *é a matriz invertível formada pelos autovetores e* J *é a matriz diagonal formada pelos autovalores, da seguinte forma*

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2c}(a-d-\sqrt{\tau^2-4\delta}) & \frac{1}{2c}(a-d+\sqrt{\tau^2-4\delta}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\tau-\sqrt{\tau^2-4\delta}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\tau+\sqrt{\tau^2-4\delta}) \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{B}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{\tau^2-4\delta}}c & \frac{1}{2\sqrt{\tau^2-4\delta}}(a-d+\sqrt{\tau^2-4\delta}) \\ \frac{1}{\sqrt{\tau^2-4\delta}}c & \frac{-1}{2\sqrt{\tau^2-4\delta}}(a-d-\sqrt{\tau^2-4\delta}) \end{pmatrix}.$$

Uma vez que

$$e^{t\mathcal{A}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\mathcal{A}^n}{n!}=\mathcal{B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\mathcal{J}^n}{n!}\mathcal{B}^{-1},$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\mathcal{J}^n}{n!}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(\frac{\tau-\sqrt{\tau^2-4\delta}}{2})^n}{n!} & 0\\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(\frac{\tau+\sqrt{\tau^2-4\delta}}{2})^n}{n!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & 0\\ 0 & e^{t\lambda_1}\end{pmatrix}.$$

Podemos calcular explicitamente a matriz $e^{t\mathcal{A}}$ *como segue*

$$\begin{aligned}
& e^{t\mathcal{A}}=\\
= & \mathcal{B}\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & 0\\ 0 & e^{t\lambda_1}\end{pmatrix}\mathcal{B}^{-1}\\
= & \begin{pmatrix}\frac{1}{4\gamma}\left[(a-d)(e^{t\lambda_2}-e^{t\lambda_1}))+2\gamma(e^{t\lambda_1}+e^{t\lambda_2})\right] & \frac{-1}{8c\gamma}\left[4bc(e^{t\lambda_2}-e^{t\lambda_1})\right]\\ \frac{1}{2\gamma}\left[c(e^{t\lambda_2}-e^{t\lambda_1})\right] & \frac{1}{4\gamma}\left[(a-d)(e^{t\lambda_1}-e^{t\lambda_2})+2\gamma(e^{t\lambda_1}+e^{\lambda_2})\right]\end{pmatrix}\\
+ & \begin{pmatrix}\frac{1}{4\gamma}\left[a(e^{t\lambda_2}-e^{t\lambda_1}))\right] & \frac{1}{2\gamma}\left[b(e^{t\lambda_2}-e^{t\lambda_1})\right]\\ \frac{1}{2\gamma}\left[c(e^{t\lambda_2}-e^{t\lambda_1})\right] & \frac{1}{4\gamma}\left[d(e^{t\lambda_2}-e^{t\lambda_1})\right]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4\gamma}\left[d(e^{t\lambda_1}-e^{t\lambda_2})\right] & 0\\ 0 & \frac{1}{4\gamma}\left[a(e^{t\lambda_1}-e^{t\lambda_2})\right]\end{pmatrix}\\
+ & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left[e^{t\lambda_1}+e^{t\lambda_2}\right] & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left[e^{t\lambda_1}+e^{t\lambda_2}\right]\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

Fazendo as substituições de $\lambda_1=\frac{\tau}{2}-\gamma$ *e* $\lambda_2=\frac{\tau}{2}+\gamma$, *pois estamos assumindo que* $\gamma=\frac{1}{2}(\sqrt{\tau^2-4\delta})$. *Então segue*

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix}\frac{1}{4\gamma}\left[a(e^{t\frac{\tau}{2}+t\gamma}-e^{t\frac{\tau}{2}-t\gamma})\right] & \frac{1}{2\gamma}\left[b(e^{t\frac{\tau}{2}+t\gamma}-e^{t\frac{\tau}{2}-t\gamma})\right]\\ \frac{1}{2\gamma}\left[c(e^{t\frac{\tau}{2}+t\gamma}-e^{t\frac{\tau}{2}-t\gamma})\right] & \frac{1}{4\gamma}\left[d(e^{t\frac{\tau}{2}+t\gamma}-e^{t\frac{\tau}{2}-t\gamma})\right]\end{pmatrix}+\\
+ & \begin{pmatrix}\frac{1}{4\gamma}\left[d(e^{t\frac{\tau}{2}-t\gamma}-e^{t\frac{\tau}{2}+t\gamma})\right] & 0\\ 0 & \frac{1}{4\gamma}\left[a(e^{t\frac{\tau}{2}-t\gamma}-e^{t\frac{\tau}{2}+t\gamma})\right]\end{pmatrix}+\\
+ & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left[e^{t\frac{\tau}{2}+t\gamma}+e^{t\frac{\tau}{2}-t\gamma}\right] & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left[e^{t\frac{\tau}{2}+t\gamma}+e^{t\frac{\tau}{2}-t\gamma}\right]\end{pmatrix}=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{t\tau}{2}}\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{4\gamma}\left[a(e^{t\gamma}-e^{-t\gamma})\right] & \frac{1}{2\gamma}\left[b(e^{t\gamma}-e^{-t\gamma})\right]\\ \frac{1}{2\gamma}\left[c(e^{t\gamma}-e^{-t\gamma})\right] & \frac{1}{4\gamma}\left[d(e^{t\gamma}-e^{-t\gamma})\right]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{-1}{4\gamma}\left[d(e^{t\gamma}-e^{-t\gamma})\right] & 0\\ 0 & \frac{-1}{4\gamma}\left[a(e^{t\gamma}-e^{-t\gamma})\right]\end{pmatrix}\right.\\
& \left.+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left[e^{t\gamma}+e^{-t\gamma}\right] & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left[e^{t\gamma}+e^{-t\gamma}\right]\end{pmatrix}\right]=
\end{aligned}$$

$$e^{\frac{t\tau}{2}}\left[\frac{1}{\gamma}\sinh(t\gamma)\begin{pmatrix}\frac{a}{2} & b\\ c & \frac{d}{2}\end{pmatrix}-\frac{1}{\gamma}\sinh(t\gamma)\begin{pmatrix}\frac{d}{2} & 0\\ 0 & \frac{a}{2}\end{pmatrix}+\cosh(t\gamma)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right].$$

Somando a matriz nula $\frac{e^{\frac{t\tau}{2}}}{\gamma}\sinh(t\gamma)\begin{pmatrix} \frac{a}{2}-\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d}{2}-\frac{d}{2}\end{pmatrix}$ *e fazendo as associações devidas, temos*

$$e^{\frac{t\tau}{2}}\left[\frac{1}{\gamma}\sinh(t\gamma)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} - \frac{1}{\gamma}\sinh(t\gamma)\begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2}\end{pmatrix} + \cosh(t\gamma)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right].$$

Para $\gamma = 0$, *temos* $\tau^2 = 4\delta$, *ou seja,*

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4bc = 0. \tag{2.10}$$

Note que

$$\begin{aligned} e^{t(\mathcal{A}-\frac{\tau}{2}I_2)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(\mathcal{A}-\frac{\tau}{2}I_2)^n}{n!} \\ &= I + t\mathcal{A} - \frac{t\tau}{2}I_2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n(\mathcal{A}-\frac{\tau}{2}I_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Daí

$$e^{t\mathcal{A}}e^{-\frac{t\tau}{2}} = I_2 + t\mathcal{A} - \frac{t\tau}{2}I_2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n(\mathcal{A}-\frac{\tau}{2}I_2)^n}{n!}.$$

Logo

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{\frac{t\tau}{2}}\left[t\mathcal{A} + \left(1-\frac{t\tau}{2}\right)I_2\right] + e^{\frac{t\tau}{2}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n(\mathcal{A}-\frac{\tau}{2}I_2)^n}{n!}.$$

Observe que $\left(\mathcal{A}-\frac{\tau}{2}I_2\right)^n = 0$ *para* $n \geqslant 2$. *De fato, pela equação* (2.10)

$$\left(\mathcal{A}-\frac{\tau}{2}I_2\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{(a-d)^2}{4}+bc & \frac{(a-d)}{2}b + \frac{(d-a)}{2}b \\ \frac{(a-d)}{2}c + \frac{(d-a)}{2}c & \frac{(d-a)^2}{2}+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Portanto

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{\frac{t\tau}{2}}\left[t\mathcal{A} + \left(1-\frac{t\tau}{2}\right)I_2\right].$$

Exemplo 2.2. *Seja*

$$X = l_2(\mathbb{K}) = \left\{\{a_n\};\ a_n \in \mathbb{K}\ e\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty\right\}.$$

Munido da norma

$$\|a\|_{l_2(\mathbb{K})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad onde\ a = \{a_n\}.$$

Para todo $a = \{a_n\} \in l_2(\mathbb{K})$ *considere*

$$T(t)a = \{e^{-x_n t} a_n\}, \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde $\{x_n\}$ *é uma sequência de números reais positivos. Note que* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0-*semigrupo em* X.

De fato, $T(t)l_2(\mathbb{K}) \subset l_2(\mathbb{K})$*, pois*

$$|e^{-x_n t} a_n|^2 = |e^{-x_n t}|^2 |a_n|^2 \leq |a_n|^2,$$

logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-x_n t} a_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Ou seja, a sequência $\{e^{-x_n t} a_n\}$ *está em* $l_2(\mathbb{K})$*. Claramente* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0-*semigrupo em* X*, pois*

(i) $T(0)a = a$;

(ii) $T(t+s)a = e^{-x_n(t+s)} a_n = e^{-x_n s}(e^{-x_n t} a_n) = e^{-x_n s} T(t)a = T(s)T(t)a$;

(iii) $\lim_{t\to 0^+} T(t)a = \lim_{t\to 0^+} e^{-x_n t} a_n = \{a_n\} = a$.

O gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ *é definido em* $D(\mathcal{A}) = \{\{a_n\}; \{x_n a_n\} \in l_2(\mathbb{K})\}$ *e para* $a \in D(\mathcal{A})$,

$$A\{a_n\} = -\{x_n a_n\}.$$

Agora vamos mostrar que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *não é um semigrupo uniformemente contínuo se a sequência* $\{x_n\}$ *for ilimitada, provando que seu gerador infinitesimal não gera um semigrupo uniformemente contínuo, como segue. Se* $\{x_n\}$ *é uma sequência ilimitada, então existe uma sequência* $\{n_k\}$ *com* $n_k > k$ *e* $x_{nk} > k^{\alpha}$ *para cada* $k \in \mathbb{N}^*$*, onde* $\alpha = 1$*, e para* $\alpha > 1$ *defina a sequência* $\{a_n\}$ *de modo*

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k^{\alpha}} & \text{se } n = n_k, \\ 0 & \text{se } n \neq n_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Note que $\{a_n\} \in l_2(\mathbb{K})$*, mas* $\{x_n a_n\} \notin l_2(\mathbb{K})$*, de fato*

$$|a_n|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{k^{2\alpha}} & \text{se } n = n_k, \\ 0 & \text{se } n \neq n_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Segue que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{k^{2\alpha}} < \infty$, *logo* $\{a_n\} \in l_2(\mathbb{K})$. *Mas*

$$|x_n a_n|^2 = \begin{cases} \dfrac{x_n}{k^{2\alpha}} & \textit{se } n = n_k, \\ 0 & \textit{se } n \neq n_k, \ \textit{para todo } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n a_n|^2 \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k^{2\alpha}} = \frac{1}{k^{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

que por sua vez diverge, ou seja, $\{x_n a_n\} \notin l_2(\mathbb{K})$. *Neste caso* $D(\mathcal{A}) \neq l_2(\mathbb{K})$, *e assim* $\mathcal{A}$ *não gera um semigrupo uniformemente contínuo.*

Exemplo 2.3. *Seja* X *o espaço das funções complexas contínuas no intervalo* $[0,1]$ *que são iguais a zero quando* $x = 1$, *com a norma do supremo. Defina*

$$(T(t)f)(x) = \begin{cases} f(x+t) & se \quad x+t \leq 1, \\ 0 & se \quad x+t > 1. \end{cases}$$

Veja que $T(t)$ *é claramente um* C_0-*semigrupo em* X. *Basta notar que*

(i) Para $t = 0$, $(T(0)f)(x) = f(x)$, *pois* $x \leq 1$;

(ii) Agora, para $x + s + t > 1$

$$(T(t+s)f)(x) = 0 = (T(t)T(s)f)(x),$$

já para o caso onde $x + s + t \leq 1$

$$(T(t+s)f)(x) \ = f(x+s+t) = (T(t)f)(x+s) = (T(t)T(s)f)(x);$$

(iii) E por último, $|(T(t)f)(x) - f(x)| = |f(x+t) - f(x)|$, *como* $|t+s-s| = |t|$ *e sabendo que* f *é uniformemente contínua, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|t+s-s| = |t| < \delta$ *implica que* $|f(x+t) - f(x)| < \epsilon$, *ou seja,* $|t| < \delta$ *implica que* $|(T(t)f)(x) - f(x)| < \epsilon$ *e portanto* $\lim\limits_{t\to 0^+} (T(t)f)(x) = f(x)$.

O gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ *é dado por*

$$D(\mathcal{A}) = \{f \in C^1([0,1]) \cap X, f' \in X\}$$

e

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(T(t)f)(x) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x), \ \textit{para todo } f \in D(\mathcal{A}).$$

Agora apresentaremos um caso particular o Exemplo 2.3 onde $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ não é um semigrupo uniformemente contínuo.

Exemplo 2.4. *Seja X o espaço das funções contínuas em $[0,+\infty)$. Defina, para $t \geq 0$, $T(t)f$ em $[0,+\infty)$ do seguinte modo*

$$(T(t)f)(x) = f(x+t), \text{ para todo } x \geq 0,$$

onde f é definida da seguinte maneira. Fixado $t > 0$, $f(0) = 1$ e $f(t) = -1$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2x}{t} & 0 \leq x \leq t, \\ -1 & x > t. \end{cases}$$

Com

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x\geq 0} |f(x)| = 1.$$

Observe que $(T(t)f)(0) - f(0) = f(t) - f(0) = -2$. Isto implica que

$$\|T(t)f - f\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x\geq 0} |f(x+t) - f(x)| \geq 2.$$

Assim, para todo $t > 0$, $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \geq 2$, ou seja, $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x \neq x$. Portanto, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ não é um semigrupo uniformemente contínuo.

O teorema a seguir mostra que todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial.

Teorema 2.5. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Existe uma constante $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.*

Prova: Vamos mostrar que existe um $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado para $0 \leq t \leq \eta$. Se isto fosse falso, existiria uma sequência $\{t_n\}$ onde $t_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq n$. Usando o princípio da limitação uniforme[1], segue que para algum

[1]

Teorema 2.6 (Princípio da limitação uniforme)**.** *Seja X e Y dois espaços de Banach e seja $\{T_i\}_{i\in I}$ uma família(não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de X em Y. Assuma que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty, \text{ para todo } x \in X.$$

Então

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Prova: Ver [4], p.32, Teorema 2.2.

□

$x \in X$, $\|T(t_n)x\|_X$ é ilimitada, o que contraria o fato de $\{T(t)\}_{t \le 0}$ ser C_0-semigrupo.

Assim, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M$, para todo $0 \le t \le \eta$. Como $\|T(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$, segue que $M \ge 1$.

Agora, para $t \ge 0$, temos que $t = n\eta + \delta$, onde $0 \le \delta < \eta$. Considere $\omega = \eta^{-1} lnM \ge 0$, assim

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(n\eta + \delta)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(\eta)^n T(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M^{n+1}. \tag{2.11}$$

Como $n = \frac{t-\delta}{\eta} < \frac{t}{\eta}$ e $e^{\omega t} = e^{t\eta^{-1} lnM} = M^{\frac{t}{\eta}}$, segue que

$$M^{n+1} = M^n M \le M M^{\frac{t}{\eta}} = M e^{\omega t}.$$

Substituindo em (2.11) concluímos que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \ge 0.$$

□

Corolário 2.7. *Se $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ um C_0-semigrupo, então para todo $x \in X$, a aplicação $[0, +\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é uma aplicação contínua.*

Prova: Sejam $t, h \ge 0$. A continuidade de $[0, +\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ segue de

$$\|T(t+h)x - T(h)x\|_X \le \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(h)x - x\|_X \le M e^{\omega t} \|T(h)x - x\|_X .$$

Uma vez que $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ é um C_0-semigrupo, então $\lim_{h \to 0^+} T(h)x = x$, logo, $M e^{\omega t} \|T(h)x - x\|_X \to 0$ quando $h \to 0^+$. Para $t \ge h \ge 0$

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\|_X &= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\|_X \le \|T(t-h)\|_X \|x - T(h)x\|_X \\ &\le M e^{\omega t} \|x - T(h)x\|_X . \end{aligned}$$

Analogamente, $M e^{\omega t} \|x - T(h)x\|_X \to 0$ quando $h \to 0^+$.

□

Teorema 2.8. *Sejam $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ um C_0-semigrupo e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Então,*

(i) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x;$$

(ii) Para todo $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(\mathcal{A})$ *e*

$$\mathcal{A}\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x;$$

(iii) Para todo $x \in D(\mathcal{A})$, $T(t)x \in D(\mathcal{A})$ *e*

$$\left.\frac{d^+T(t)x}{dt}\right|_{t=0} = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x;$$

(iv) Para todo $x \in D(\mathcal{A})$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \mathcal{A}T(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)\mathcal{A}xd\tau.$$

Prova:

(i) Prova de (i), defina $\sigma(t) = \int_0^t T(s)xds$, onde $\sigma : [0, +\infty) \to X$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $\dfrac{d\sigma(t)}{dt} = T(t)x$ e, portanto,

$$T(t)x = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds.$$

(ii) Dados $x \in X$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t \left[T(s+h)x - T(s)x\right] ds \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(s+h)xds - \int_0^t T(s)xds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds - \int_0^h T(s)xds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds\right].
\end{aligned}$$

Note que quando $h \to 0^+$, por (i), o lado direito da equação tende a $T(t)x - x$, o que prova (ii).

(iii) Sejam $x \in X$ e $h > 0$, então

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right) T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right) x \to T(t)\mathcal{A}x, \quad \text{quando} \quad h \to 0^+ \tag{2.12}$$

Assim, $T(t)x \in D(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x$. Por (2.12) também podemos concluir que o lado direito da derivada de $T(t)x$ é $T(t)\mathcal{A}x$, isto é,

$$\frac{d^+T(t)}{dt}x = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x.$$

Para provar (iii), devemos mostrar que para $t > 0$ a derivada de $T(t)x$ existe e é igual a $T(t)\mathcal{A}x$, para isto, note que

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0^+} \left\| \left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)\mathcal{A}x\right]\right\|_X \\
\leq & \lim_{h\to 0^+} \left\| \left[\frac{T(t-h+h)x - T(t-h)x}{h} - T(t-h)\mathcal{A}x\right]\right\|_X \\
+ & \lim_{h\to 0^+} \|[T(t-h)\mathcal{A}x - T(t)\mathcal{A}x]\|_X \\
= & \lim_{h\to 0^+} \|T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \left[\frac{T(h)x - x}{h} - \mathcal{A}x\right]\right\|_X + \lim_{h\to 0^+} \|[T(t-h)\mathcal{A}x - T(t)\mathcal{A}x]\|_X
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ambos os termos do lado direito de (2.13) estão tendendo a zero, o primeiro é pelo fato de que $x \in D(\mathcal{A})$ e $\|T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada quando $0 \leq h \leq t$ e o segundo termo é por causa da continuidade forte de $T(t)$. Assim, $\dfrac{d^-T(t)}{dt}x = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x$ e portanto

$$\frac{dT(t)}{dt}x = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x.$$

(iv) Por (iii), temos que $\dfrac{dT(t)}{dt}x = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x$. Calculando a integral definida de s a t em ambos os lados

$$\int_s^t \frac{dT(t)}{dt}x = \int_s^t \mathcal{A}T(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)\mathcal{A}xd\tau,$$

segue que

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \mathcal{A}T(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)\mathcal{A}xd\tau,$$

o que prova (iv).

□

Corolário 2.9. *Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ e $\mathcal{A}$ é um operador linear fechado.*

Prova: Para cada $x \in X$ seja $x_t = \dfrac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$, pela parte (ii) do Teorema 2.8, $x_t \in D(\mathcal{A})$ para $t > 0$, pela parte (i) do mesmo teorema, $x_t = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)xds = T(0)x = x$, ou seja, $x_t \to x$ quando $t \to 0^+$. Assim, $\overline{D(\mathcal{A})} = X$. A linearidade de $\mathcal{A}$ é evidente, pois $T(t)$ é linear.

Agora vamos mostrar que o operador $\mathcal{A}$ é fechado. Sejam $x_n \in D(\mathcal{A})$, tal que $x_n \to x$ e $\mathcal{A}x_n \to y$ quando $n \to \infty$, pela parte (iv) do Teorema 2.8

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)\mathcal{A}x_n ds, \tag{2.14}$$

note que o integrando do lado direito de (2.14) converge uniformemente para $T(s)y$ em intervalos fechados. Consequentemente, quando $n \to \infty$ em (2.14)

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds, \tag{2.15}$$

dividindo (2.15) por t, temos

$$\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds.$$

Como $\dfrac{1}{t}(T(t)x - x) \to \mathcal{A}x$ e $\dfrac{1}{t}\int_0^t T(s)yds \to y$, pela unicidade do limite, $\mathcal{A}x = y$ quando t tende a 0^+.

$\square$

Teorema 2.10. *Sejam $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ C_0-semigrupos com geradores infinitesimais $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Prova: Seja $x \in D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{B})$, pelo Teorema 2.8 segue facilmente que a função $[0, +\infty) \ni s \mapsto T(t-s)S(s)x \in X$ é diferenciável e que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -\mathcal{A}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\mathcal{B}S(s)x \\
&= -T(t-s)\mathcal{A}S(s)x + T(t-s)\mathcal{B}S(s)x \\
&= -T(t-s)\mathcal{A}S(s)x + T(t-s)\mathcal{A}S(s)x = 0,
\end{aligned}$$

a segunda e terceira igualdade são justificadas pelo item (iii) do Teorema 2.8 e pela hipótese de $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, respectivamente e, portanto, a aplicação $[0, +\infty) \ni s \mapsto T(t-s)S(s)x \in X$ é constante. E em particular, quando $s = 0$, temos $T(t-s)S(s)x = T(t)x$

e quando $s = t$, temos $T(t-s)S(s)x = S(t)x$, ou seja, $T(t)x = S(t)x$, para todo $x \in D(\mathcal{A})$, mas como $T(t)$ e $S(t)$ são limitados e $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ segue que $T(t)x = S(t)x$, para todo $x \in X$.

□

Teorema 2.11. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Se $D(\mathcal{A}^n)$ é o domínio de $\mathcal{A}^n$, então $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(\mathcal{A}^n)$ é denso em X.*

Prova: Seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ com suporte compacto em $(0,\infty)$. Para cada $x \in X$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, considere o elemento

$$x_\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds.$$

Para $h > 0$, suficientemente pequeno, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}x_\varphi &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)[T(s+h)x - T(s)x]ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty \varphi(\xi-h)T(\xi)xd\xi - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(\xi-h)T(\xi)xd\xi - \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(\xi-h)T(\xi)xd\xi - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s-h)T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(s-h)T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty [\varphi(s-h)T(s)x - \varphi(s)T(s)x]ds - \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(s-h)T(s)xds \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{h}[\varphi(s-h) - \varphi(s)]T(s)xds. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

O integrando do lado direito de 2.16 converge uniformemente em $[0,\infty)$ para $-\varphi'(s)T(s)x$, quando $h \to 0^+$. Portanto $x_\varphi \in D(\mathcal{A})$ e

$$\mathcal{A}x_\varphi = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}x_\varphi = -\int_0^\infty -\varphi'(s)T(s)xds.$$

Desde que $\varphi \in \mathcal{D}$, então $\varphi^{(n)}$, a n-ésima derivada de φ também pertence a $\mathcal{D}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Por indução conclui-se que $x_\varphi \in D(\mathcal{A}^n)$

$$\mathcal{A}^n x_\varphi = (-1)^n \int_0^\infty -\varphi^{(n)}(s)T(s)xds, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e consequentemente, $x_\varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(\mathcal{A}^n)$. Agora, tome Y o subespaço vetorial gerado por $\{x_\varphi; x \in X, \varphi \in \mathcal{D}\}$ pelo argumento acima temos $Y \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(\mathcal{A}^n)$.

Para concluir a prova mostraremos que Y é denso em X. Suponha que Y não é denso em X, então pelo corolário do teorema de Hahn-Banach[2], existe um funcional linear $x^* \in X^*, x^* \neq 0$ tal que $x^*(x_\varphi) = 0$ para toda $x_\varphi \in Y$, logo

$$\int_0^\infty \varphi(s) x^*(T(s)x) ds = x^* \left(\int_0^\infty \varphi(s) T(s) x ds \right) = 0 \tag{2.17}$$

para todo $x \in X, \varphi \in \mathcal{D}$, isto implica que $x \in X$ a função contínua $s \mapsto x^*(T(s)x)$ é nula em $[0, +\infty)$, caso contrário, teria sido possível escolher $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que o lado direito de (2.17) não fosse zero. Em particular, para $s = 0$, $x^*(x) = 0$. Isto vale para todo $x \in X$ e, portanto, $x^* = 0$, o que é absurdo. Assim $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(\mathcal{A}^n)$ é denso em X.

□

Lema 2.13. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de modo que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ para $t \geq 0$. Se $x \in D(\mathcal{A}^2)$, então*

$$\|\mathcal{A}x\|_X^2 \leq 4M^2 \left\|\mathcal{A}^2 x\right\|_X \|x\|_X . \tag{2.18}$$

Prova: Usando a fórmula de Taylor, temos

$$T(t)x = x + t\mathcal{A}x + \int_0^\infty (t-s) T(s) \mathcal{A}^2 x ds.$$

Daí,

$$t\mathcal{A}x = T(t)x - x - \int_0^\infty (t-s) T(s) \mathcal{A}^2 x ds$$

[2]

Corolário 2.12. *Seja X um espaço de Banach. Para todo $x_0 \in X$ existe $f_0 \in X^*$ tal que*

$$\|f_0\|_{X^*} = \|x_0\|_X \text{ e } \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|_X^2 .$$

Prova: Ver [4], p.3, Corolário 1.3.

□

Da desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}\|t\mathcal{A}x\|_X &\leq \|T(t)x\|_X + \|x\|_X + \left\|\int_0^\infty (t-s)T(s)\mathcal{A}^2 x ds\right\|_X \\ \|\mathcal{A}x\|_X &\leq t^{-1}\left(\|T(t)x\|_X + \|x\|_X\right) + t^{-1}\left\|\int_0^\infty (t-s)T(s)\mathcal{A}^2 x ds\right\|_X \\ &\leq \frac{2M}{t}\|x\|_X + \frac{Mt}{2}\|\mathcal{A}^2 x\|_X. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Onde foi usado $M \geq 1$, desde que $\|T(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$. Note que se $\mathcal{A}^2 x = 0$, então $\mathcal{A}x = 0$, logo vale (2.18). Se $\mathcal{A}^2 x \neq 0$, faça $t = \frac{2\|x\|_X^{\frac{1}{2}}}{\|\mathcal{A}^2 x\|^{\frac{1}{2}}}$ em (2.19), daí

$$\|\mathcal{A}x\|_X \leq \frac{2M\|\mathcal{A}^2 x\|_X^{\frac{1}{2}}}{2\|x\|_X^{\frac{1}{2}}}\|x\|_X + \frac{M\frac{2\|x\|_X^{\frac{1}{2}}}{\|\mathcal{A}^2 x\|_X^{\frac{1}{2}}}}{2}\|\mathcal{A}^2 x\|_X = 2M\|x\|_X^{\frac{1}{2}}\|\mathcal{A}^2 x\|_X^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\|\mathcal{A}x\|_X^2 \leq 4M^2\|\mathcal{A}^2 x\|_X\|x\|_X,$$

o que prova o Lema.

□

Exemplo 2.5. *Seja X um espaço de Banach de funções uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$ com norma do supremo. Para $f \in X$ definimos*

$$(T(t)f)(s) = f(t+s).$$

Provamos no Exemplo 2.3 que $T(t)$ é um C_0-semigrupo e que

$$D(\mathcal{A}) = \left\{f \in C^1([0,1]) \cap X, f' \in X\right\}$$

e $\mathcal{A}f = f'$ para $f \in D(\mathcal{A})$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{f(s)\neq 0}\frac{|T(t)f(s)|}{|f(s)|}\sup_{f(s)\neq 0}\frac{|f(t+s)|}{f(s)} \leq 1.$$

Logo, vale o Lema 2.13 e assim, obtém-se a Desigualdade de Landau

$$(\sup|f'(s)|)^2 \leq 4(\sup|f''(s)|)(\sup|f(s)|),$$

onde o supremo é tomado em $\mathbb{R}$.

2.3 O Teorema de Hille-Yosida

O Teorema de Hille-Yosida caracteriza operadores lineares que geram semigrupos com geradores não necessariamente limitados. Este tipo de geradores aparecem em estudos de problemas de dimensão infinita.

Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Pelo Teorema 2.5 existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ para $t \geq 0$. Com isso temos a seguinte definição.

Definição 2.5. *Um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é chamado de uniformemente limitado se $\omega = 0$, além disso, se $M = 1$, então ele é chamado de semigrupo de contrações.*

Definição 2.6. *Seja X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ um operador linear. O conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ é o subconjunto $\rho(\mathcal{A})$ de todos os números complexos λ tais que $\lambda I - \mathcal{A}$ é injetor, $\overline{R(\lambda I - \mathcal{A})} = X$ e*

$$R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : R(\lambda I - \mathcal{A}) \subset X \to X$$

é limitado.

Para $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, o operador $R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ é chamado de operador resolvente. O espectro do operador $\mathcal{A}$ é definido por $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$.

Observação 2.2. *Sejam $\mathcal{A}$ um operador fechado densamente definido em X e $R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ o seu resolvente. Se μ e λ estão no conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$, então temos a identidade do resolvente*

$$R(\lambda : \mathcal{A}) - R(\mu : \mathcal{A}) = (\mu - \lambda)R(\lambda : \mathcal{A})R(\mu : \mathcal{A}). \tag{2.20}$$

Para mostrar a igualdade (2.20), basta notar que do resolvente $\mathcal{A}$, tem-se a seguinte igualdade.

$$\mathcal{A}R(\lambda : \mathcal{A}) = \lambda R(\lambda : \mathcal{A}) - I,$$

para todo $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, então, dados $\mu, \lambda \in \rho(\mathcal{A})$, temos

$$R(\lambda : \mathcal{A}) = R(\lambda : \mathcal{A})[\mu R(\mu : \mathcal{A}) - \mathcal{A}R(\mu : \mathcal{A})]$$

e

$$R(\mu : \mathcal{A}) = R(\mu : \mathcal{A})[\lambda R(\lambda : \mathcal{A}) - \mathcal{A}R(\lambda : \mathcal{A})]$$

Subtraindo as equações temos

$$
\begin{aligned}
R(\lambda:\mathcal{A})-R(\mu:\mathcal{A}) &= R(\lambda:\mathcal{A})[\mu R(\mu:\mathcal{A})-\mathcal{A}R(\mu:\mathcal{A})]-R(\mu:\mathcal{A})[\lambda R(\lambda:\mathcal{A}) \\
&- \mathcal{A}R(\lambda:\mathcal{A})] \\
&= \mu R(\lambda:\mathcal{A})R(\mu:\mathcal{A})-\mathcal{A}R(\lambda:\mathcal{A})R(\mu:\mathcal{A})-\lambda R(\mu:\mathcal{A})R(\lambda:\mathcal{A}) \\
&+ \mathcal{A}R(\lambda:\mathcal{A})R(\mu:\mathcal{A}) \\
&= (\mu-\lambda)R(\lambda:\mathcal{A})R(\mu:\mathcal{A}),
\end{aligned}
$$

o que implica

$$R(\lambda:\mathcal{A})-R(\mu:\mathcal{A})=(\mu-\lambda)R(\lambda:\mathcal{A})R(\mu:\mathcal{A})$$

Teorema 2.14 (Hille-Yosida). *Um operador (ilimitado) $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ se, e somente se*

(a) $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})}=X$;

(b) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contém $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda>0$

$$\|R(\lambda:\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)}\leq\frac{1}{\lambda}.$$

Prova: (Necessidade). Se $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, então $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})}=X$, pelo Corolário 2.9. Para $\lambda>0$ e $x\in X$ seja

$$R(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt.$$

Desde que a aplicação $[0,+\infty)\ni t\mapsto T(t)x\in X$ é contínua e uniformemente limitada, existe a integral imprópria de Riemann, que por sua vez define o operador $R(\lambda)$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)x\|_X &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\|_X \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\|_X \, dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X \, dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\|_X \, dt \\
&= \|x\|_X \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \\
&= \|x\|_X \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

A segunda desigualdade é válida pelo fato de $T(t)$ ser limitado e a terceira porque $T(t)$ é uma contração, ou seja, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$. Além disso, para $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T(t+h)x - T(t)x) dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(\xi - h)} T(\xi)x d\xi - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t + \lambda h} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t + \lambda h} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t + \lambda h} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t + \lambda h} T(t)x dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Note que quando $h \to 0^+$ (2.21) tende a $\lambda R(\lambda)x - x$, ou seja, para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$ $R(\lambda)x \in D(\mathcal{A})$ e

$$\mathcal{A}R(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I, \qquad (2.22)$$

ou seja,

$$(\lambda - \mathcal{A})R(\lambda) = I. \qquad (2.23)$$

Veja ainda que para $x \in D(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} R(\lambda)\mathcal{A}x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\mathcal{A}x dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{A}T(t)x dt \\ &= \mathcal{A}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt\right) \\ &= \mathcal{A}R(\lambda)x, \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde foram usados o item (iii) do Teorema (2.8) e o fato de $\mathcal{A}$ ser fechado. Usando (2.23) e (2.24) segue que

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - \mathcal{A})R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - \mathcal{A}R(\lambda)x \\ &= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)\mathcal{A}x = R(\lambda)(\lambda I - \mathcal{A})x, \text{ para todo } x \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Isso mostra que $R(\lambda)$ é a inversa de $(\lambda I - \mathcal{A})$ para todo $\lambda > 0$, ou seja, $R(\lambda : \mathcal{A}) = R(\lambda)$. Portanto as condições (a) e (b) são necessárias.

Para mostrar que as condições (a) e (b) são suficientes para que $\mathcal{A}$ seja um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, necessitamos de três lemas.

Lema 2.15. *Seja $\mathcal{A}$ um operador que satisfaça as condições (a) e (b) do Teorema 2.14 e $R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$. Então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : \mathcal{A})x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Prova: Primeiro suponha que $x \in D(\mathcal{A})$, segue

$$\|\lambda R(\lambda : \mathcal{A})x - x\|_X = \|\mathcal{A}R(\lambda : \mathcal{A})x\|_X = \|R(\lambda : \mathcal{A})\mathcal{A}x\|_X \leq \frac{1}{\lambda}\|\mathcal{A}x\|_X \to 0,$$

quando $\lambda \to \infty$, onde primeira igualdade é justificada por (2.22) e a segunda por (2.23), a desigualdade é devido à hipótese. Como $D(\mathcal{A})$ é denso em X e $\|\lambda R(\lambda : \mathcal{A})\|_X \leq 1$, ou seja, limitado. Segue

$$\lambda R(\lambda : \mathcal{A})x \to x, \quad \text{quando} \quad \lambda \to \infty, \text{ para todo } \in X.$$

□

Antes do próximo lema precisamos definir a Aproximação de Yosida.

Definição 2.7. *Para cada $\lambda > 0$ definimos a Aproximação de Yosida por*

$$\mathcal{A}_\lambda := \lambda \mathcal{A} R(\lambda : \mathcal{A}) = \lambda(\lambda R(\lambda : \mathcal{A}) - I) = \lambda^2 R(\lambda : \mathcal{A}) - \lambda I.$$

Lema 2.16. *Seja $\mathcal{A}$ um operador que satisfaça as condições (a) e (b) do Teorema 2.14. Se $\mathcal{A}_\lambda$ é uma Aproximação de Yosida de $\mathcal{A}$, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{A}_\lambda x = \mathcal{A}x, \ \textit{para todo } x \in D(\mathcal{A}).$$

Prova: Para $x \in D(\mathcal{A})$, pelo Lema 2.15 e pela Definição de aproximação de Yosida

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{A}_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : \mathcal{A}) \mathcal{A}x = \mathcal{A}x.$$

□

Lema 2.17. *Se o Lema 2.16 é válido, então $\mathcal{A}_\lambda$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações $\{e^{t\mathcal{A}_\lambda}\}_{t \geq 0}$. Além disso, para cada $x \in X$ e $\lambda, \ \mu > 0$ temos*

$$\left\| e^{t\mathcal{A}_\lambda} x - e^{t\mathcal{A}_\mu} x \right\|_X \leq t \left\| \mathcal{A}_\lambda x - \mathcal{A}_\mu x \right\|_X .$$

Prova: Note que $\mathcal{A}_\lambda$ é um operador linear e limitado, pelo Terema 2.2, ele é um gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{t\mathcal{A}_\lambda}\}_{t \geq 0.}$ Temos também que

$$\left\| e^{t\mathcal{A}_\lambda} \right\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| e^{t(\lambda^2 R(\lambda : \mathcal{A}) - \lambda I)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} = e^{-\lambda t} \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda : \mathcal{A})} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \| R(\lambda : \mathcal{A}) \|_{\mathcal{L}(X)}} \leq 1,$$

onde usamos na primeira desigualdade a inequação (2.3). Isto prova que $\{e^{t\mathcal{A}_\lambda}\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$e^{t\mathcal{A}_\lambda} x - e^{t\mathcal{A}_\mu} x = \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{ts\mathcal{A}_\lambda} e^{t(1-s)\mathcal{A}_\mu}) ds,$$

logo

$$\begin{aligned} \left\| e^{t\mathcal{A}_\lambda} x - e^{t\mathcal{A}_\mu} x \right\|_X &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{ts\mathcal{A}_\lambda} e^{t(1-s)\mathcal{A}_\mu}) ds \right\|_X \\ &\leq \int_0^1 \left\| (e^{ts\mathcal{A}_\lambda} e^{t(1-s)\mathcal{A}_\mu} (\mathcal{A}_\lambda x - \mathcal{A}_\mu x) \right\|_X ds \\ &\leq t \left\| \mathcal{A}_\lambda x - \mathcal{A}_\mu x \right\|_X , \end{aligned}$$

o que prova o Lema.

□

(Suficiência). Continuando a prova do Teorema 2.14. Seja $x \in D(\lambda)$,

$$\left\|e^{t\mathcal{A}_\lambda}x - e^{t\mathcal{A}_\mu}x\right\|_X \leq t\left\|\mathcal{A}_\lambda x - \mathcal{A}_\mu x\right\|_X \leq t\left\|\mathcal{A}_\lambda x - \mathcal{A}x\right\|_X + t\left\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}_\mu x\right\|_X$$

Usando o Lema 2.16, temos que $e^{t\mathcal{A}_\lambda}x$ converge uniformemente em intervalos limitados, quando $\lambda \to \infty$. Como $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ e $\left\|e^{t\mathcal{A}_\lambda}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, segue

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{t\mathcal{A}_\lambda}x = T(t)x, \text{ para todo } x \in X. \tag{2.25}$$

O limite de (2.25) é novamente uniforme em intervalos limitados e satisfaz as propriedades de semigrupos, continuidade e contração, ou seja

- $T(0) = I$;
- $T(s+t) = T(s)T(t)$;
- $[0,+\infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é contínua para $t \geq 0$, sendo ela, o limite uniforme da função contínua $[0,+\infty) \ni t \mapsto e^{t\mathcal{A}_\lambda}x \in X$;
- $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\left\|e^{t\mathcal{A}_\lambda}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$

Assim $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações em X.

Para concluir a prova de que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, considere $x \in D(\mathcal{A})$, usando a equação (2.25) e o Teorema 2.8, temos

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(e^{t\mathcal{A}_\lambda} - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{s\mathcal{A}_\lambda}\mathcal{A}_\lambda x ds = \int_0^t T(t)\mathcal{A}x ds, \tag{2.26}$$

onde a terceira igualdade segue da convergência uniforme de $e^{t\mathcal{A}_\lambda}\mathcal{A}_\lambda x$ para $T(t)\mathcal{A}x$ em intervalos limitados. Seja $\mathcal{B}$ o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e seja $x \in D(\mathcal{A})$, dividindo (2.26) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$, temos

$$\mathcal{B}x \leftarrow \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(t)\mathcal{A}x ds \to Ax. \tag{2.27}$$

Pelo lado direito de (2.27), $x \in D(\mathcal{B})$ e pelo esquerdo, $\mathcal{B}x = \mathcal{A}x$. Assim, $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$. Note que $\mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, e como vale (a) e (b), então $1 \in \rho(\mathcal{B})$, por outro lado, assumimos que $1 \in \rho(\mathcal{A})$ (por (b)). Desde que $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, então $\mathcal{B}|_{D(\mathcal{A})} = \mathcal{A}$, segue que

$$(I - \mathcal{B})D(\mathcal{B}) = X = (I - \mathcal{A})D(\mathcal{A}) = (I - \mathcal{B})D(\mathcal{A}).$$

Implica que

$$D(\mathcal{B}) = (I - \mathcal{B})^{-1}X = D(\mathcal{A}),$$

e portanto $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

$\square$

Corolário 2.18. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Se $\mathcal{A}_\lambda$ é a aproximação de Yosida de $\mathcal{A}$, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t\mathcal{A}_\lambda}x, \text{ para todo } x \in X. \tag{2.28}$$

Prova: Pelo Teorema 2.14, o lado direito de (2.28) define um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$. Pelo Teorema 2.10, segue que $S(t) = T(t)$.

$\square$

Corolário 2.19. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. O conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ contém o semiplano aberto direito, isto é, $\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > 0\}$ e para cada λ*

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{Re\lambda}. \tag{2.29}$$

Prova: O operador $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ está bem definido para λ, tal que $Re\lambda > 0$. Usando o mesmo argumento da prova da parte da necessidade do Teorema 2.14, podemos mostrar que $R(\lambda) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$, ou seja, $\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > 0\}$. A desigualdade (2.29) é provada do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)x\|_X &= \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right\|_X \\
&\leq \int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\|T(t)x\|_X\, dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X\, dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\|x\|_X\, dt \\
&= \|x\|_X \frac{1}{Re\lambda}.
\end{aligned}$$

$\square$

O exemplo a seguir mostra que o conjunto resolvente de um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo não necessariamente contém mais que um semiplano aberto.

Exemplo 2.6. *Seja X espaço de todas as funções limitadas, uniformemente contínuas em $[0, \infty)$. Defina*

$$(T(t)f)(s) = f(t+s) \qquad f \in X,$$

para todo $t \geq 0$ e $s \geq 0$. Pelo Exemplo 2.3, sabemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações em X. Seu gerador infinitesimal em X é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \{f \in X; f' \in X\}$$

e

$$(\mathcal{A}f)(s) = f'(s), \text{ para todo } f \in D(\mathcal{A}).$$

Pelo Corolário 2.19, $\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > 0\}$ e para cada um desses λ a equação

$$(\lambda - \mathcal{A})\varphi_\lambda(s) = 0 \tag{2.30}$$

tem solução não trivial. De fato, para $\varphi_\lambda(s) = e^{\lambda s}$, temos

$$(\lambda - \mathcal{A})\varphi_\lambda(s) = (\lambda - \mathcal{A})e^{\lambda s} = \lambda e^{\lambda s} - \lambda e^{\lambda s} = 0.$$

Se $Re\lambda \leq 0$, $\varphi_\lambda \in X$ mas não é solução da equação (2.30) e, portanto, o semiplano fechado esquerdo está no espectro $\sigma(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.

É importante observar que, dado um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$, para $\omega \geq 0$ e $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, não é difícil mostrar que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações. De fato,

- $S(0) = e^{-\omega 0}T(0) = I$;
- $S(s+t) = e^{-\omega(s+t)}T(s+t) = e^{-\omega s}e^{-\omega t}T(s)T(t) = e^{-\omega s}T(s)e^{-\omega t}T(t) = S(s)S(t)$;
- $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)x = \lim\limits_{t\to 0^+} e^{-\omega t}T(t)x = x$;
- Por último, note que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = e^{-\omega t}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\omega t}e^{\omega t} = 1$.

Portanto, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações.

Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então $S(t) = e^{-\omega t}e^{t\mathcal{A}} = e^{(\mathcal{A}-\omega I)t}$. Logo $\mathcal{A} - \omega I$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Por outro lado, se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então $e^{t\mathcal{A}} = e^{-\omega t}T(t)$, isto implica que $T(t) = e^{t\mathcal{A}}e^{\omega t} = e^{(\mathcal{A}+\omega I)t}$, ou seja, $\mathcal{A} + \omega I$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e que ainda satisfaz $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$, basta notar que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{t\mathcal{A}}e^{\omega t}\|_X \leq e^{\omega t}\|e^{t\mathcal{A}}\|_X \leq e^{\omega t}$.

Corolário 2.20. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$ se, e somente se* *(a)* $\mathcal{A}$ *é fechado e* $\overline{D(\mathcal{A})} = X$;

(b) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ *de* $\mathcal{A}$ *contém o raio* $\{\lambda \in \mathbb{C}; Im\lambda = 0, \lambda > \omega\}$ *e para cada* $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Prova: A prova deste Corolário é uma aplicação direta do Teorema de Hille-Yosida. Basta definir o semigrupo $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, já vimos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações.

A seguir, apresentaremos um resultado que é muitas vezes útil para provar que se um determinado operador $\mathcal{A}$ satisfaz a condição de suficiência do Teorema 2.14, então este operador é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, mas antes temos a seguinte definição.

Definição 2.8. *Sejam* X *um espaço de Banach e* X^* *o seu dual. Denotamos o valor de* $x^* \in X^*$ *em* $x \in X$ *por* $\langle x^*, x\rangle$ *ou* $\langle x, x^*\rangle$. *Se* $\mathcal{A}$ *é um operador linear em* X, *sua imagem numérica* $S(\mathcal{A})$ *é o conjunto*

$$S(\mathcal{A}) = \{\langle x^*, \mathcal{A}x\rangle; x \in D(\mathcal{A}), \|x\|_X = 1, x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} = 1, \langle x^*, x\rangle = 1\}. \quad (2.31)$$

Como consequência do teorema de Hahn-Banach (veja Corolário 2.12) , esse conjunto é não vazio.

Teorema 2.21. *Seja* $\mathcal{A}$ *um operador linear fechado com domínio* $D(\mathcal{A})$ *denso em* X. *Seja* $S(\mathcal{A})$ *sua imagem numérica de* $\mathcal{A}$ *e seja* $\sum$ *o complemento de* $\overline{S(\mathcal{A})}$ *em* $\mathbb{C}$. *Se* $\lambda \in \sum$, *então* $\lambda I - \mathcal{A}$ *é injetiva e tem imagem fechada. Além disso, se* $\sum_0$ *é uma componente de* $\sum$ *satisfazendo* $\rho(\mathcal{A}) \cap \sum_0 \neq \varnothing$, *então o espectro de* $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A})$, *está contido no complemento* S_o *de* $\sum_0$ *e*

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, \overline{S(\mathcal{A})})}.$$

Prova: Seja $\lambda \in \sum$. Se $x \in D(\mathcal{A})$, $\|x\|_X = 1, x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} = 1, \langle x^*, x\rangle = 1$, então

$$\begin{aligned}
0 < d(\lambda, \overline{S(\mathcal{A})}) &\leq |\lambda - \langle x^*, \mathcal{A}x\rangle| \\
&= |\lambda\langle x^*, x\rangle - \langle x^*, \mathcal{A}x\rangle| \\
&= |\langle x^*, \lambda x\rangle - \langle x^*, \mathcal{A}x\rangle| \\
&= |\langle x^*, \lambda x - \mathcal{A}x\rangle| \\
&\leq \|x\|\|\lambda x - \mathcal{A}x\|_X \\
&= \|\lambda x - \mathcal{A}x\|_X.
\end{aligned}$$

Logo o operador $\lambda I - \mathcal{A}$ tem uma única solução, portanto pela Alternativa de Fredholm [3] $\lambda I - \mathcal{A}$ é injetivo e tem imagem fechada. Se além disso, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, então $\lambda I - \mathcal{A}$ é uma bijeção, ou seja, existe $R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$. Logo

$$d(\lambda, \overline{S(\mathcal{A})}) \leq \|\lambda x - \mathcal{A}x\|_X = \|[R(\lambda : \mathcal{A})]^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|R(\lambda : \mathcal{A})\|^{-1}_{\mathcal{L}(X)},$$

ou seja,

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, \overline{S(\mathcal{A})})}.$$

Agora vamos mostrar que se $\sum_0$ é um componente de $\sum$, tal que $\rho(\mathcal{A}) \cap \sum_0 \neq 0$, então $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq S_0$. Para isto, considere o conjunto $\rho(\mathcal{A}) \cap \sum_0$, ele é aberto em $\sum_0$, por definição. Mas também é fechado em $\sum_0$, de fato, dada $\{\lambda_n\} \in \rho(\mathcal{A}) \cap \sum_0$ tal que $\lambda_n \to \lambda \in \sum_0$, segue que, para um n suficientemente grande,

$$d(\lambda_n, \overline{S(\mathcal{A})}) > \frac{1}{2} d(\lambda_n, \overline{S(\mathcal{A})}) > 0$$

e consequentemente, para n suficientemente grande,

$$|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n, \overline{S(\mathcal{A})}).$$

Segue de (2.32) que, para cada n grande, λ está numa bola de raio menor que $\|R(\lambda : \mathcal{A})\|^{-1}_{\mathcal{L}(X)}$, centrada em λ_n, o que implica $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e portanto $\rho(\mathcal{A}) \cap \sum_0$ é fechado em $\sum_0$. A conexidade de $\sum_0$ implica que $\rho(\mathcal{A}) \cap \sum_0 = \sum_0$ ou $\rho(\mathcal{A}) \supseteq \sum_0$ o que é equivalente a dizer que $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq S_0$.

□

[3]

Teorema 2.22 (Alternativa de Fredholm)**.** *Sejam X um espaço de Banach e T um operador linear compacto definido em X, ou seja, $T \in \mathcal{K}(X)$. Então*

(a) $N(I - T)$ tem dimensão finita;

(b) $R(I - T)$ é fechado, mais precisamente $R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}$;

(c) $N(I - T) = \{0\}$ se, e somente se $R(I - T) = X$;

(d) $dimN(I - T) = dimN(I - T^*)$.

Prova: Ver [4], p. 160, Teorema 6.6.

□

2.4 Teorema de Lumer-Phillips

Nesta seção vamos ver uma diferente caracterização dos geradores infinitesimais, que utiliza o conceito de operadores dissipativos. Para tanto, são necessárias algumas definições.

Definição 2.9. *Sejam X um espaço de Banach e X^* o seu dual. Para todo $x \in X$ definimos o conjunto dual $F(x) \subset X^*$ por*

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}$$

Como consequência do teorema de Hahn-Banach (veja Corolário 2.12) que $F(x) \neq \varnothing$ para todo $x \in X$.

Definição 2.10. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é dissipativo se para todo $x \in D(\mathcal{A})$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle \mathcal{A}x, x^*\rangle \leq 0$.*

Teorema 2.23. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é dissipativo se, e somente se*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})x\|_X \geq \lambda\|x\|_X, \text{ para todo } x \in D(\mathcal{A}) \text{ e } \lambda > 0. \tag{2.32}$$

Prova: Sejam $\mathcal{A}$ dissipativo, $\lambda > 0$ e $x \in D(\mathcal{A})$. Se $x^* \in F(x)$ e $Re\langle \mathcal{A}x, x^*\rangle \leq 0$, então

$$\begin{aligned}\|\lambda x - \mathcal{A}x\|_X\|x\|_X &\geq |\langle \lambda x - \mathcal{A}x, x^*\rangle| \\ &\geq Re\langle \lambda x - \mathcal{A}x, x^*\rangle \\ &\geq Re\langle \lambda x, x^*\rangle - Re\langle \mathcal{A}x, x^*\rangle\end{aligned}$$

Como $-Re\langle \mathcal{A}x, x^*\rangle \geq 0$, segue que

$$\|\lambda x - \mathcal{A}x\|_X\|x\|_X \geq Re\langle \lambda x, x^*\rangle = \lambda\|x\|_X^2,$$

o que prova (2.32). Reciprocamente, seja $x \in D(\mathcal{A})$ e assuma que vale (2.32). Se $y_\lambda^* \in F(\lambda x - \mathcal{A}x)$ e $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|_{X^*}}$, então $\|z_\lambda^*\|_{X^*} = 1$, segue

$$\begin{aligned}\lambda\|x\|_X &\leq \|\lambda x - \mathcal{A}x\|_X \\ &= \langle \lambda x - \mathcal{A}x, z_\lambda^*\rangle \\ &= \lambda Re\langle x, z_\lambda^*\rangle - Re\langle \mathcal{A}x, z_\lambda^*\rangle \\ &\leq \lambda\|x\|_X - Re\langle \mathcal{A}x, z_\lambda^*\rangle, \text{ para todo } \lambda > 0.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Assim, de (2.33) temos os seguintes resultados

$$Re\langle \mathcal{A}x, z_\lambda^*\rangle \leq 0 \text{ e } Re\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq \|x\|_X - \frac{1}{\lambda}\|\mathcal{A}x\|_X.$$

Como a bola unitária de X^* é compacta na topologia fraca de X, então $z_\lambda^* \to z^*$ quando $\lambda \to \infty$ para $z^* \in X^*$ e $\|z^*\|_{X^*} = 1$, segue que

$$Re\langle \mathcal{A}x, z^*\rangle \leq 0 \text{ e } Re\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq \|x\|_X, \text{ quando } \lambda \to \infty.$$

Mas $Re\langle x, z^*\rangle \leq |\langle x, z^*\rangle| \leq \|x\|_X\|z^*\|_{X^*} = \|x\|_X$, logo $Re\langle x, z^*\rangle = \|x\|_X$. Tomando $x^* = \|x\|_X z^*$ temos

$$\langle x, x^*\rangle = \langle x, \|x\|_X z^*\rangle = \|x\|_X^2$$

e

$$0 \geq Re\langle \mathcal{A}x, z^*\rangle = Re\left\langle \mathcal{A}x, \frac{x^*}{\|x\|_X}\right\rangle = \frac{1}{\|x\|_X} Re\langle \mathcal{A}x, x^*\rangle.$$

Assim, $x^* \in F(x)$ e $Re\langle \mathcal{A}x, x^*\rangle \leq 0$, respectivamente. Portanto, para todo $x \in D(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ é dissipativo.

□

Teorema 2.24 (Lumer-Phillips)**.** *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio $D(\mathcal{A})$ denso em X.*

(a) Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.

(b) Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X, então $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}$ é dissipativo. Além disso, para cada $x \in D(\mathcal{A})$ e cada $x^* \in F(x)$, $Re\langle \mathcal{A}x, x^*\rangle \leq 0$.

Prova: (a) Como $\mathcal{A}$ é dissipativo, segue do Teorema 2.23 que

$$\|\lambda x - \mathcal{A}x\|_X \geq \lambda\|x\|_X, \text{ para todo } \lambda > 0 \text{ e } x \in D(\mathcal{A}). \tag{2.34}$$

Desde que $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, para todo $y \in X$, existe $x \in X$ tal que $y = (\lambda_0 I - \mathcal{A})x$.

Fazendo $\lambda = \lambda_0$, segue de (2.34),

$$\begin{aligned} \|R(\lambda_0 : \mathcal{A})y\|_X &= \|R(\lambda_0 : \mathcal{A})(\lambda_0 I - \mathcal{A})x\|_X \\ &= \|x\|_X \\ &\leq \frac{1}{\lambda_0}\|\lambda_0 x - \mathcal{A}x\|_X \\ &= \frac{1}{\lambda_0}\|y\|_X, \end{aligned}$$

ou seja, $R(\lambda_0 : \mathcal{A}) = (\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$ é um operador linear e limitado, e assim fechado.

Mas então $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ é fechado e, portanto, $\mathcal{A}$ é fechado. Se $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$, então $\rho(\mathcal{A}) \supseteq [0, \infty)$ e $\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ por (2.34), ou seja, $R(\lambda : \mathcal{A})$ é limitado pelo mesmo argumento.

Pelo Teorema de Hille-Yosida, $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X. Para completar a prova de (a) nos resta mostrar que $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$, para todo $\lambda > 0$. Considere o conjunto

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < \lambda < \infty \text{ e } R(\lambda I - \mathcal{A}) = X\}.$$

Seja $\lambda \in \Lambda$. Por (2.34), $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Desde que $\rho(\mathcal{A})$ é um aberto, uma vizinhança de λ está em $\rho(\mathcal{A})$, logo a intersecção dessa vizinhança com $\mathbb{R}$ é claramente Λ, ou seja, Λ é aberto. Por outro lado, seja $\{\lambda_n\} \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda > 0$ e, para todo $y \in X$, existe $\{x_n\} \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\lambda_n x_n - \mathcal{A}x_n = y. \tag{2.35}$$

Usando (2.34) segue que

$$\|y\|_X = \|\lambda_n x_n - \mathcal{A}x_n\|_X \geq \lambda_n \|x_n\|_X,$$

sendo assim

$$\|x_n\|_X \leq \frac{1}{\lambda_n}\|y\|_X \leq C,$$

onde $C > 0$. Agora, note que

$$\begin{aligned} \lambda_m\|x_n - x_m\|_X &\leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - \mathcal{A}(x_n - x_m)\|_X \\ &\leq \|\lambda_m x_n - \mathcal{A}x_n - (\lambda_m x_m - \mathcal{A}x_m)\|_X \\ &\leq |\lambda_n - \lambda_m|\|x_n\|_X \\ &\leq C|\lambda_n - \lambda_m|, \end{aligned}$$

e assim, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Seja $x_n \to x$, por (2.35) $\mathcal{A}x_n \to \lambda x - y$, como $\mathcal{A}$ é um operador fechado, $x \in D(\mathcal{A})$ e $\lambda x - \mathcal{A}x = y$, segue que $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ e $\lambda \in \Lambda$ e portanto Λ também é fechado em $(0, \infty)$ desde que $\lambda_0 \in \Lambda$ por assumir que $\Lambda \neq \varnothing$. Assim $\Lambda = (0, \infty)$, o que completa a prova de (a).

Prova de (b). Se $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então pelo Teorema de Hille-Yosida, $\rho(\mathcal{A}) \supseteq (0, \infty)$ e além disso, $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo λ. Segue ainda que, se $x \in D(\mathcal{A}), x^* \in F(x)$, então

$$|\langle T(t)x, x^*\rangle| \leq \|T(t)x\|_X \|x^*\|_{X^*} \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X \|x^*\|_{X^*} \leq \|x\|_X^2. \tag{2.36}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Re\langle T(t)x - x, x^*\rangle &= Re\langle T(t)x, x^*\rangle - Re\langle x, x^*\rangle && (2.37) \\ &= Re\langle T(t)x, x^*\rangle - \|x\|_X^2 \leq 0. \ \ (Por (2.36)) && (2.38) \end{aligned}$$

Dividindo (2.37) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$, temos

$$\frac{1}{t} Re\langle T(t)x - x, x^*\rangle = Re\left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^*\right\rangle = Re\langle \mathcal{A}x, x^*\rangle \leq 0,$$

isto é válido para todo $x^* \in F(x)$, o que prova o item (b).

□

Corolário 2.25. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear fechado densamente definido. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são ambos dissipativos, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.*

Prova: Pelo Teorema 2.24(a), é suficiente provar que $R(I - \mathcal{A}) = X$. Como $\mathcal{A}$ é dissipativo e fechado, $R(I - \mathcal{A})$ é um subespaço fechado de X. Então, se $R(I - \mathcal{A}) \neq X$, existirá $x^* \in X^*, x^* \neq 0$ tal que $\langle x^*, x - \mathcal{A}x\rangle = 0$, para todo $x \in D(\mathcal{A})$. Isto implica que $x^* - \mathcal{A}x^* = 0$, como $\mathcal{A}^*$ é dissipativo, segue do Teorema 2.23 que $0 = \|x^* - \mathcal{A}x^*\|_X \geq \|x^*\|_X$, ou seja, $x^* = 0$, o que é um absurdo, portanto $R(I - \mathcal{A}) = X$.

Vamos terminar a seção com algumas propriedades de operadores dissipativos, mas antes temos a seguinte definição.

Definição 2.11. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é chamado de fechável quando dada uma sequência $\{x_n\} \subset D(\mathcal{A})$ com $x_n \to 0$ em $D(\mathcal{A})$, e a sequência $\{\mathcal{A}x_n\}$ também convergir em X, tivermos $\{\mathcal{A}x_n\} \to 0$.*

Teorema 2.26. *Seja $\mathcal{A}$ um operador dissipativo em X.*

(a) Se para algum $\lambda_0 > 0$, $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, *então* $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ *para todo* $\lambda > 0$;

(b) Se $\mathcal{A}$ *é fechável, então* $\overline{\mathcal{A}}$, *o fecho de* $\mathcal{A}$, *é também dissipativo;*

(c) Se $\overline{D(\mathcal{A})} = X$, *então* $\mathcal{A}$ *é fechável.*

Prova: O item (a) já foi provado na demonstração do Teorema 2.24, parte (a). Para provar (b), seja $x \in \overline{D(\mathcal{A})}$, $y = \overline{\mathcal{A}}x$. Segue que existe uma sequência $\{x_n\}$, $x_n \in D(\mathcal{A})$, tal que $x_n \to x$ e $\mathcal{A}x_n \to y = \overline{\mathcal{A}}x$. Como $\mathcal{A}$ é dissipativo, pelo Teorema 2.23

$$\|\lambda x_n - \mathcal{A}x_n\|_X \geq \|x\|_X,$$

para $\lambda > 0$ e fazendo $n \to \infty$ temos

$$\|\lambda x - \overline{\mathcal{A}}x\|_X \geq \|x\|_X, \text{ para todo } \lambda > 0. \tag{2.39}$$

Como (2.39) vale para todo $x \in \overline{D(\mathcal{A})}$, segue que $\overline{\mathcal{A}}$ é dissipativo pelo Teorema 2.23.

Para provar (c), assuma que $\mathcal{A}$ não pode ser fechado. Segue que existe uma sequência tal que $x_n \in D(\mathcal{A})$, $x_n \to 0$ e $\mathcal{A}x_n \to y$, com $\|y\|_X = 1$. Usando o Teorema 2.23 segue que para todo $t > 0$ e $x \in D(\mathcal{A})$

$$\|(x + \frac{1}{t}x_n) - t\mathcal{A}(x + \frac{1}{t}x_n)\|_X \quad \geq \quad \|(x + \frac{1}{t}x_n)\|_X,$$

isto é,

$$\|(x + \frac{1}{t}x_n) - t\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_n)\|_X \quad \geq \quad \|(x + \frac{1}{t}x_n)\|_X.$$

Fazendo $n \to \infty$ e $t \to 0^+$ temos

$$\|x - y\|_X \quad \geq \quad \|x\|_X$$

para todo $x \in D(\mathcal{A})$. Mas isso é impossível já que $D(\mathcal{A})$ é denso em X e portanto $\mathcal{A}$ pode ser fechado.

□

Teorema 2.27. *Seja* $\mathcal{A}$ *um operador dissipativo com* $R(I - \mathcal{A}) = X$. *Se* X *é reflexivo, então* $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.

Prova: Seja $x^* \in X^*$ tal que $\langle x^*, x\rangle = 0$, para todo $x \in D(\mathcal{A})$. Vamos inicialmente mostrar que $x^* = 0$. Desde que $R(I - \mathcal{A}) = X$ é suficiente mostrar que $\langle x^*, x - \mathcal{A}x\rangle = 0$, para todo $x \in D(\mathcal{A})$, o que é equivalente a mostrar que $\langle x^*, \mathcal{A}x\rangle = 0$, pois

$$\langle x^*, x - \mathcal{A}x\rangle = \langle x^*, x\rangle - \langle x^*, \mathcal{A}x\rangle = -\langle x^*, \mathcal{A}x\rangle.$$

Seja $x \in D(\mathcal{A})$, pelo Teorema 2.26 (a) existe uma sequência $\{x_n\}$ tal que $x = x_n - \frac{1}{n}\mathcal{A}x_n$. Desde que

$$\mathcal{A}x_n = n(x_n - x) \in D(\mathcal{A}), x \in D(\mathcal{A}^2),$$

temos

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}x_n - \frac{1}{n}\mathcal{A}^2 x_n = \mathcal{A}x_n\left(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\right),$$

logo

$$\mathcal{A}x_n \quad = \quad \left(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\right)^{-1}\mathcal{A}x.$$

Note que $R(1:\mathcal{A}) = \left(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\right)^{-1}$, pelo Teorema 2.23,

$$\|R(1:\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\|\left(I - \frac{1}{n}\mathcal{A}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

Assim, $\|\mathcal{A}x_n\| \leq \|\mathcal{A}x\|_X$ e $\|x_n - x\|_X = \frac{1}{n}\|\mathcal{A}x_n\|_X \leq \frac{1}{n}\|\mathcal{A}x\|_X$, e assim $x_n \to x$. Desde que $\|\mathcal{A}x_n\|_X \leq C$ e X é reflexivo, existe uma subsequência $\{\mathcal{A}x_{nk}\}$ de $\{\mathcal{A}x_n\}$ tal que $\mathcal{A}x_{nk} \to y$ na topologia fraca. Como $\mathcal{A}$ é fechado (veja na demonstração do Teorema 2.24), segue que $y = \mathcal{A}x$, pois

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}x_n - \frac{1}{n}\mathcal{A}^2 x_n.$$

Finalmente, pelo fato de que $\langle x^*, z\rangle = 0$, para todo $z \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\langle x^*, \mathcal{A}x_{nk}\rangle = \langle x^*, n_k(x_{nk} - x)\rangle = n_k\langle x^*, x_{nk} - x\rangle = 0. \tag{2.40}$$

Passando o limite quando $n_k \to \infty$, em (2.40), obtemos $\langle x^*, \mathcal{A}x\rangle = 0$.

□

O próximo exemplo mostra que o Teorema 2.27 não é válido para espaços de Banach em Geral.

Exemplo 2.7. *Seja $X = C([0,1])$, isto é, o espaço das funções contínuas em $[0,1]$ com a norma do supremo. Seja $D(\mathcal{A}) = \{u; u \in C^1([0,1])$ e $u(0) = 0\}$ e $\mathcal{A}u = -du/dt$*

para $u \in D(\mathcal{A})$. *Para toda* $f \in X$ *a equação* $\lambda u - \mathcal{A}u = f$ *tem uma solução* u *dada por*

$$u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi - x)} f(\xi) d\xi.$$

Isto mostra que $R(I - \mathcal{A}) = X$.

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x e^{\lambda(\xi - x)} f(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \sup_{\xi \neq 0} |f(\xi)| \int_0^x |e^{\lambda(\xi - x)}| d\xi \\ &= \|f\|_X \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x}). \end{aligned}$$

Segue que

$$\lambda |u(x)| \leq \|f\|_X (1 - e^{-\lambda x}). \tag{2.41}$$

Como $\|f\|_X = \|\lambda u - \mathcal{A}u\|_X$ *e* $1 - e^{-\lambda x} < 1$, *por* (2.41), *temos*

$$\lambda |u(x)| \leq \|f\|_X (1 - e^{-\lambda x}) \leq \|\lambda u - \mathcal{A}u\|_X, \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Logo $\lambda \|u(x)\|_X \leq \|\lambda u - \mathcal{A}u\|_X$ *e com isso,* $\mathcal{A}$ *é dissipativo pelo Teorema 2.23. Mas* $D(\overline{\mathcal{A}}) = \{u; u \in X \text{ e } u(0) = 0\}$ *que é diferente de* $X = C([0, 1])$.

2.5 A caracterização do gerador infinitesimal de C_0-semigrupos

Nas duas seções anteriores, apresentamos caracterizações diferentes de geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de contrações. Vimos no final da seção 2.3 que estas caracterizações produzem caracterizações de geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de operadores lineares e limitados satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$. Passemos agora para a caracterização geral de geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de operadores lineares e limitados. Pelo Teorema 2.5, segue que para tal semigrupo existe uma constante real $M \geq 1$ e ω tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. Usando argumentos semelhantes aos usados na seção 2.3, mostraremos que para caracterizar o gerador infinitesimal no caso geral, é suficiente caracterizar o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo uniformemente limitado. Isso será feito por renormalização do espaço de Banach X para que o C_0-semigrupo uniformemente limitado torna-se, na nova norma, um C_0-semigrupo de contrações e, em seguida, usando as caracterizações anteriormente provadas dos geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de contrações.

Lema 2.28. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear para o qual $\rho(\mathcal{A}) \supset (0, \infty)$. Se*

$$\|\lambda^n R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_X \leq M, \quad \textit{para todo } n = 1, 2, \ldots, \lambda > 0, \tag{2.42}$$

então existe uma norma $|.|$ em X, equivalente à norma $\|.\|_X$ em X e satisfaz

$$\|x\|_X \leq |x| \leq M\|x\|_X, \quad \textit{para todo } x \in X \tag{2.43}$$

e

$$|\lambda R(\lambda : \mathcal{A})x| \leq |x|, \quad \textit{para todo } x \in X, \ \lambda > 0. \tag{2.44}$$

Prova: Sejam $\mu > 0$ e

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\lambda : \mathcal{A})^n x\|_X.$$

Por (2.42) temos

$$\|x\|_X \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|_X \tag{2.45}$$

e

$$\|\mu R(\mu : \mathcal{A})\|_\mu \leq 1. \tag{2.46}$$

Afirmamos que

$$\|\lambda R(\lambda : \mathcal{A})\|_X \leq 1, \quad \text{para todo } 0 < \lambda \leq \mu. \tag{2.47}$$

De fato, se $y = R(\lambda : \mathcal{A})x$, então $y = R(\mu : \mathcal{A})(x + (\mu - \lambda)y))$ e por (2.46), temos

$$\begin{aligned}
\|y\|_\mu &\leq \|R(\mu : \mathcal{A})x\|_X + \|R(\mu : \mathcal{A})((\mu - \lambda)y))\|_X \\
&\leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + (\mu - \lambda)\frac{1}{\mu}\|y\|_\mu \\
&= \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu.
\end{aligned}$$

Donde concluímos,

$$\begin{aligned} \|y\|_\mu - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu &\leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu \\ \lambda\|y\|_\mu &\leq \|x\|_\mu \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda\|y\|_\mu = \|\lambda R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|x\|_\mu = \|\mu R(\mu : \mathcal{A})\|_\mu \leq 1,$$

como afirmamos. Usando (2.45) e (2.47) segue que

$$\|\lambda^n R(\lambda : \mathcal{A})^n x\|_X \leq \|\lambda^n R(\lambda : \mathcal{A})^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad \text{para todo } 0 < \lambda \leq \mu. \tag{2.48}$$

Tomando o supremo quando $n \geq 0$ no lado direito de (2.48), segue que $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$ para $0 < \lambda \leq \mu$. Finalmente, definimos

$$|x| = \lim_{\mu\to\infty} \|x\|_\mu.$$

Assim, (2.43) segue de (2.45) e tomando $n = 1$ em (2.48) temos

$$\|\lambda R(\lambda : \mathcal{A})x\|_\mu \leq \|x\|_\mu,$$

fazendo $\mu \to \infty$ provamos (2.44).

$\square$

Observação 2.3. *Sejam $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em um espaço de Banach X e seja $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. Se a norma em X é alterada para uma norma equivalente, então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ permanece um C_0-semigrupo em X com nova norma. O gerador infinitesimal não mudará, nem o fato de $\mathcal{A}$ ser fechado ou densamente definido, pois todas essas propriedades são topológicas e com isso independem da norma em X.*

Teorema 2.29. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ $(M > 1)$, se, e somente se*

(i) $\mathcal{A}$ é fechado e $D(\mathcal{A})$ é denso em X;

(ii) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contém $\mathbb{R}^+$ e

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \textit{para todo} \;\; \lambda > 0, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

Prova: Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$. Defina

$$|x| = \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\|_X. \tag{2.49}$$

Então

$$\|x\|_X \leq |x| \leq M\|x\|_X, \tag{2.50}$$

assim $|.|$ é uma norma equivalente à norma $\|.\|$ em X. Além disso,

$$|T(t)x| = \sup_{s\geq 0} \|T(s)T(t)x\|_X \leq \sup_{s+t\geq 0} \|T(s+t)x\|_X = |x|, \tag{2.51}$$

ou seja,

$$|T(t)x| \leq |x|.$$

Logo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações em X com norma $|.|$. Segue do Teorema 2.14 e das observações no início da sua prova que

(i) $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = X$;

(ii) $|R(\lambda : \mathcal{A})| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para $\lambda > 0$.

Assim, por (2.50)

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})^n x\|_X \leq |R(\lambda : \mathcal{A})^n x| \leq \frac{|x|}{\lambda^n} \leq \frac{M\|x\|_X}{\lambda^n},$$

ou seja,

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda^n}.$$

Logo as condições (i) e (ii) são necessárias. Reciprocamente, se as condições (i) e (ii) são satisfeitas, pelo Lema 2.28 existe uma norma $|.|$ em X satisfazendo (2.43) e (2.44). Considere X com essa norma, pela Observação 2.3 $\mathcal{A}$ é um operador fechado, densamente definido com $\rho(\mathcal{A}) \supset (0, \infty)$ e $|R(\lambda : \mathcal{A})| \leq \frac{1}{\lambda}$ para $\lambda > 0$. Logo, pelo Teorema 2.14, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X munido da norma $|.|$. Retornando à norma original, pela Observação 2.3, temos ainda que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de $T(t)$ e

$$\|T(t)x\|_X \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|_X$$

ou seja,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$$

Portanto as condições (i) e (ii) são também suficientes.

$\square$

Teorema 2.30. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, se, e somente se*

(i) $\mathcal{A}$ é fechado e $D(\mathcal{A})$ é denso em X;

(ii) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contém o raio (ω, ∞) e

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \text{para } \lambda > \omega, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{2.52}$$

Prova: Basta definir no semigrupo $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, com $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, já vimos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo e que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, logo vale o Teorema 2.29, para mostrar que $\|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$ para $\lambda > \omega, n = 1, 2, \ldots$, basta notar que se $\lambda - \omega \leq \lambda$, então $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$.

$\square$

Observação 2.4. *A condição que todo real λ, $\lambda > \omega$, está no conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ junto com a estimativa* (2.52) *implica que todo complexo λ, satisfazendo $Re\lambda > \omega$, está no conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ e*

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \quad \text{para todo } Re\lambda > \omega, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{2.53}$$

Prova: Defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt.$$

desde que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, $R(\lambda)$ está bem definido para todo λ, satisfazendo $Re\lambda > \omega$. De fato,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\|_X &\leq \int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\|T(t)x\|_X dt \\ &\leq M\|x\|_X \int_0^\infty e^{-(Re\lambda - \omega)t} dt \\ &= \frac{M\|x\|_X}{Re\lambda - \omega}. \end{aligned}$$

Usando argumentos análogos aos da prova do Teorema 2.14 mostra-se que $R(\lambda) =$

$R(\lambda : \mathcal{A})$. Para provar (2.53), assuma que $Re\lambda > \omega$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}R(\lambda:\mathcal{A})x &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= -\int_0^\infty te^{-\lambda t}T(t)xdt.\end{aligned}$$

Obtemos, por indução que

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}R(\lambda:A)x = (-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{2.54}$$

Por outro lado, pela identidade do resolvente segue que, para todo $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, $\lambda \mapsto R(\lambda : \mathcal{A})$ é analítica e

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}R(\lambda:\mathcal{A}) = -R(\lambda:\mathcal{A})^2$$

Por indução, temos

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} = (-1)^n n! R(\lambda:\mathcal{A})^{n+1}. \tag{2.55}$$

Comparando (2.54) e (2.55), temos

$$(-1)^n n! R(\lambda:\mathcal{A})^{n+1}x = (-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T(t)xdt,$$

ou seja,

$$R(\lambda:\mathcal{A})^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)xdt.$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned}\|R(\lambda:\mathcal{A})^n x\|_X &\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-Re\lambda t}\|T(t)x\|_X dt\\ &\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-Re\lambda t}Me^{\omega t}\|x\|_X dt\\ &= \frac{M\|x\|_X}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-(Re\lambda-\omega)t}dt.\end{aligned}$$

Fazendo $a = Re\lambda - \omega > 0$, segue

$$\|R(\lambda:\mathcal{A})^n x\|_X \leq \frac{M\|x\|_X}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-at}dt.$$

Usando o método de integração por partes onde $u = t^{n-1}$, ou seja, $du = (n-1)t^{n-2}$ e $dv = e^{-at}dt$, o que implica $v = -\frac{e^{-at}}{a}$. Usando esse método $n-1$ vezes obtemos

$$-\left.\frac{t^{n-1}e^{-at}}{a}\right|_0^\infty - \left.\frac{(n-1)t^{n-1}e^{-at}}{a^2}\right|_0^\infty - \ldots - \frac{(n-1)!}{a^{n-1}}\int_0^\infty e^{-at}dt.$$

Todas as parcelas são claramente iguais a zero exceto

$$-\frac{(n-1)!}{a^{n-1}}\int_0^\infty e^{-at}dt = \frac{(n-1)!}{a^n}.$$

Isto prova que

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \quad \text{para todo } Re\lambda > \omega, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{2.56}$$

□

Concluímos esta seção com a extensão da representação da fórmula do Corolário 2.18 para o caso geral.

Teorema 2.31. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em X. Se $\mathcal{A}_\lambda$ é a aproximação de Yosida de $\mathcal{A}$, isto é, $\mathcal{A}_\lambda = \lambda\mathcal{A}R(\lambda : \mathcal{A})$, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t\mathcal{A}_\lambda x}. \tag{2.57}$$

Prova: Começamos com o caso que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$. Na prova do Teorema 2.29 exibimos uma norma $|.|$ em X que é equivalente à norma $\|.\|_X$ em X e consequentemente $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações. Usando o Corolário 2.18 segue que $|e^{t\mathcal{A}_\lambda x} - T(t)x| \to 0$ quando $\lambda \to \infty$, para todo $x \in X$. Como as normas são equivalentes, vale (2.57) em todo X. Para o caso geral quando $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, onde $\omega \leq 0$, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \leq M$, e pelo que acabamos de ver o resultado é válido. Para o caso que $\omega > 0$, temos que $\lambda \to \|e^{\mathcal{A}_\lambda}\|_X$ é limitado para $\lambda > 2\omega$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|e^{\mathcal{A}_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} &= e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 R(\lambda:\mathcal{A})t}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^{2k}t^k\|R(\lambda : \mathcal{A})^k\|_{\mathcal{L}(X)}}{k!} \\
&\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^{2k}t^k\frac{M}{(\lambda-\omega)^k}}{k!} \\
&= Me^{-\lambda t}e^{\frac{\lambda^2 t}{(\lambda-\omega)}} \\
&= Me^{(\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega})t} \\
&\leq Me^{2\omega t}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Em seguida, considere o semigrupo uniformemente limitado $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, com seu gerador infinitesimal $\mathcal{A} - \omega I$. Da primeira parte da prova de teorema, temos

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(\mathcal{A}-\omega I)_\lambda + \omega t}x, \text{ para todo } x \in X. \tag{2.59}$$

Um simples cálculo mostra que

$$(\mathcal{A} - \omega I)_\lambda + \omega I = \mathcal{A}_{\lambda+\omega} + H(\lambda)$$

onde

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= 2\omega I - \omega(\omega + 2\lambda)R(\lambda + \omega : \mathcal{A}) \\ &= \omega[\omega R(\lambda + \omega : \mathcal{A}) - 2\mathcal{A}R(\lambda + \omega : \mathcal{A})]. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \omega I)_\lambda &= \lambda(\mathcal{A} - \omega I)R(\lambda : \mathcal{A} - \omega I) \\ &= \lambda(\mathcal{A} - \omega I + \lambda I - \lambda I)(\lambda I + \omega I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= (\lambda + \omega - \omega)(\mathcal{A} - \omega I - \lambda I + \lambda I)(\lambda I + \omega I - \mathcal{A})^{-1} \end{aligned}$$

Seja $\beta = \lambda + \omega$, segue

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \omega I)_\lambda &= (\beta - \omega)(\mathcal{A} - \beta I + \lambda I)(\beta I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= \beta(\mathcal{A} - \beta I + \lambda I)(\beta I - \mathcal{A})^{-1} - \omega(\mathcal{A} - \beta I + \lambda I)(\beta I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= \beta(\mathcal{A} - \beta I)(\beta I - \mathcal{A})^{-1} + \beta\lambda(\beta I - \mathcal{A})^{-1} - \omega(\mathcal{A} - \beta I + \lambda I)(\beta I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{\lambda+\omega} - \beta^2(\beta I - \mathcal{A})^{-1} + \beta\lambda(\beta I - \mathcal{A})^{-1} - \omega(\mathcal{A} - \beta I + \lambda I)(\beta I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{\lambda+\omega} - \beta^2(\beta I - \mathcal{A})^{-1} + \beta\lambda(\beta I - \mathcal{A})^{-1} + \omega I - \omega\lambda(\beta I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{\lambda+\omega} - \beta^2(\beta I - \mathcal{A})^{-1} + \beta\lambda(\beta I - \mathcal{A})^{-1} + 2\omega I - \omega I - \omega\lambda(\beta I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{\lambda+\omega} - \omega I - (\omega^2 + \lambda\omega + \lambda^2)^2((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1} \\ &+ (\omega\lambda + \lambda^2)((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1} + 2\omega I - \omega\lambda((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{\lambda+\omega} - \omega I - \omega(\omega + 2\lambda)((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1} - \lambda^2((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1} \\ &+ \lambda^2((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1} + \omega\lambda((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1} - \omega\lambda((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1} \\ &= \mathcal{A}_{\lambda+\omega} - \omega I - \omega(\omega + 2\lambda)((\lambda + \omega)I - \mathcal{A})^{-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$(\mathcal{A} - \omega I)_\lambda + \omega I = \mathcal{A}_{\lambda+\omega} + H(\lambda), \tag{2.60}$$

onde

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= 2\omega I - \omega(\omega+2\lambda)R(\lambda+\omega:\mathcal{A}) \\
&= \omega\left[2I - (\omega+2\lambda)R(\lambda+\omega:\mathcal{A})\right] \\
&= \omega\left[2R(\lambda+\omega:\mathcal{A})(\lambda+\omega-\mathcal{A}) - (\omega+2\lambda)R(\lambda+\omega:\mathcal{A})\right] \\
&= \omega\left[2(\lambda+\omega-\mathcal{A}) - (\omega+2\lambda)\right]R(\lambda+\omega:\mathcal{A}) \\
&= \omega\left[(\omega-2\mathcal{A})\right]R(\lambda+\omega:\mathcal{A}) \\
&= \omega[\omega R(\lambda+\omega:\mathcal{A}) - 2\mathcal{A}R(\lambda+\omega:\mathcal{A})].
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|H(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \omega(\|\omega R(\lambda+\omega:\mathcal{A})\|_X + 2\|\mathcal{A}R(\lambda+\omega:\mathcal{A})\|_X) \\
&\leq \omega(\|\omega R(\lambda+\omega:\mathcal{A})\|_X + 2\|\lambda R(\lambda+\omega:\mathcal{A}) - I\|_X) \\
&\leq \omega(\|\omega R(\lambda+\omega:\mathcal{A})\|_X + 2\|\lambda R(\lambda+\omega:\mathcal{A})\|_X + 2\|I\|_X) \\
&\leq \omega\left(\omega\frac{M}{\lambda+\omega-\omega} + 2\lambda\frac{M}{\lambda} + 2\right) \\
&= 2\omega + \left(\frac{\omega^2}{\lambda} + 2\omega\right)M,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|H(\lambda)\|_X \leq 2\omega + (2\omega + \lambda^{-1}\omega^2)M$ e, para todo $x \in D(\mathcal{A})$, $\|H(\lambda)x\|_X \leq M\lambda^{-1}(\omega^2\|x\|_X + 2\omega\|\mathcal{A}\|_X) \to 0$ quando $\lambda \to \infty$. Portanto $H(\lambda)x \to 0$ quando $\lambda \to \infty$, para todo $x \in X$. Uma vez que

$$\|e^{tH(\lambda)x-x}\|_X \leq te^{t\|H(\lambda)\|_X}\|H(\lambda)x\|_X$$

temos

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tH(\lambda)}x = x, \text{ para todo } x \in X. \tag{2.61}$$

Finalmente, desde que $H(\lambda)$ e $\mathcal{A}_{\lambda+\omega}$ comutam, temos

$$\begin{aligned}
\|e^{t\mathcal{A}_\lambda}x - T(t)x\|_X &= \|e^{t\mathcal{A}_\lambda+tH(\lambda-\omega)}x - T(t)x - e^{t\mathcal{A}_\lambda+tH(\lambda-\omega)}x + e^{t\mathcal{A}_\lambda}x\|_X \\
&\leq \|e^{t\mathcal{A}_\lambda+tH(\lambda-\omega)}x - T(t)x\|_X + \|e^{t\mathcal{A}_\lambda}\|_X\|e^{tH(\lambda-\omega)}x - x\|_X.
\end{aligned}$$

Quando $\lambda \to \infty$ a primeira parcela do lado direito tende a zero por (2.59) e a segunda parcela tende a zero por (2.58) e por (2.61). Portanto

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{t\mathcal{A}_\lambda}x = T(t)x, \text{ para todo } x \in X. \tag{2.62}$$

□

2.6 C_0-grupos de operadores lineares e limitados

Definição 2.12. *Uma família $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ de operadores lineares e limitados em um espaço de Banach X é um C_0-grupo de operadores lineares e limitados se*

(i) $T(0) = I$ *(I é o operador identidade em X);*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para todos* $-\infty < t, s < \infty$;

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x,$ *para todo* $x \in X$.

O gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ do grupo $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ é definido por

$$\mathcal{A}x = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

quando o limite existe, o domínio de $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ onde o limite acima existe.

Seja $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ um C_0-grupo de operadores lineares e limitados. Da Definição 2.12 fica claro que para $t \geq 0, T(t)$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$. Além disso, para $t \geq 0, S(t) = T(-t)$ é também um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados com gerador infinitesimal $-\mathcal{A}$. Desse modo, se $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ é um C_0-grupo de operadores lineares e limitados em X, ambos $\mathcal{A}$ e $-\mathcal{A}$ são geradores infinitesimais de C_0-semigrupos que serão denotados por $T_+(t)$ e $T_-(t)$, respectivamente. Reciprocamente, se $\mathcal{A}$ e $-\mathcal{A}$ são geradores infinitesimais de C_0-semigrupos $T_+(t)$ e $T_-(t)$ vamos mostrar no próximo teorema que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal do C_0-grupo dado por

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & \text{se} \quad t \geq 0 \\ T_-(-t) & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Teorema 2.32. *O operador linear $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores lineares e limitados $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega|t|}$ se, e somente se*

(a) $\mathcal{A}$ *é fechado e* $\overline{D(\mathcal{A})} = X$;

(b) Todo real $\lambda, |\lambda| > \omega$, está no conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ e para cada λ

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(|\lambda| - \omega)^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.63}$$

Prova: A necessidade segue do fato de que ambos $\mathcal{A}$ e $-\mathcal{A}$ são geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de operadores lineares e limitados satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. Desde que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de tal semigrupo, pelo Teorema 2.30 vale as propriedades (a) e (b) para $\lambda > \omega$. Além disso, como $-\mathcal{A}$ é também um gerador infinitesimal de tal C_0-semigrupo e $R(\lambda : \mathcal{A}) = -R(-\lambda : -\mathcal{A})$, pois

$$-R(-\lambda : -\mathcal{A}) \;\; = \;\; -\int_0^{\infty} e^{\lambda t} T(-t) x dt.$$

Fazendo -t=u, temos

$$-R(-\lambda : -\mathcal{A}) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} T(u) x du = R(\lambda : \mathcal{A}).$$

Segue que $\sigma(-\mathcal{A}) = -\sigma(\mathcal{A})$ e que (2.63) é satisfeita para $-\lambda < -\omega$ e, portanto, as condições (a) e (b) são necessárias.

Se as condições (a) e (b) são satisfeitas, do Teorema 2.30 segue que $\mathcal{A}$ e $-\mathcal{A}$ são geradores infinitesimais dos C_0-semigrupos $T_-(t)$ e $T_+(t)$, respectivamente e que $\|T_{\mp}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. Pelo Teorema 2.31, $T_-(t)x = \lim\limits_{\lambda \to \infty} e^{t\mathcal{A}_\lambda} x$ e $T_+(t)x = \lim\limits_{\mu \to \infty} e^{t\mathcal{A}_\mu} x$, onde $\mathcal{A}_\nu$ são aproximações de Yosida de $\mathcal{A}$ e claramente $T_-(t)$ e $T_+(t)$, comutam.

Se $W(t) := T_-(t)T_+(t)$, então $W(t)$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados para $t \geq 0$. Para $x \in D(\mathcal{A}) = D(-\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{W(t)x - x}{t} &= \frac{T_-(t)T_+(t)x - T_-(t)x + T_-(t)x - x}{t} \\ &= T_-(t)\frac{T_+(t)x - x}{t} + \frac{T_-(t)x - x}{t} \to I\mathcal{A}x - \mathcal{A}x = 0, \quad \text{quando } t \to 0. \end{aligned}$$

Assim, para $x \in D(\mathcal{A})$ temos $W(t)x = x$. Como $D(\mathcal{A})$ é denso em X e $W(t)$ é limitado, temos $W(t) = I$ ou $T_-(t) = T_+(t)^{-1}$. Definindo

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & \text{se} \;\; t \geq 0 \\ T_-(-t) & \text{se} \;\; t < 0, \end{cases}$$

obtemos um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega|t|}$. Portanto as condições (a) e (b) são suficientes.

$\square$

Lema 2.33. *Sejam $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados, e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Se para todo $t > 0, T(t)^{-1}$ existe e é um operador limitado,* *então*

$$S(t) = \begin{cases} T(t)^{-1} & se \;\; t > 0 \\ I & se \;\; t = 0, \end{cases}$$

é um C_0-semigrupo de operadores lineares e limitados e tem como gerador infinitesimal o operador $-\mathcal{A}$. Além disso, se

$$U(t) = \begin{cases} T(t) & se \;\; t \geq 0 \\ T(-t)^{-1} & se \;\; t < 0, \end{cases},$$

então $\{U(t)\}_{-\infty \leq t \leq \infty}$ é um C_0-grupo de operadores lineares e limitados.

Prova: As propriedades de semigrupos para $S(t)$ são óbvias:

1. $S(0) = I$;

2. $S(t+s) = T(t+s)^{-1} = (T(t)T(s))^{-1} = T(s)^{-1}T(t)^{-1} = S(s)S(t)$;

3. Para provar a continuidade forte de $S(t)$, note que para $s > 0$ a imagem de $T(s)$ é todo X. Sejam $x \in X$ e $s > 1$, existe $y \in X$, tal que $T(s)y = x$ para $t < 1$, temos

$$\|T(t)^{-1}x - x\|_X = \|T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y\|_X = \|T(s-t)y - T(s)y\|_X,$$

quando $t \to 0$. Portanto $S(t)$ é fortemente contínuo.

Note que para $x \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} &= \lim_{t \to 0^+} T(t)\frac{T(t)^{-1}x - x}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{x - T(t)x}{t} \\ &= -\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}. \\ &= -\mathcal{A}x, \end{aligned}$$

ou seja, $-\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)^{-1}\}_{t \geq 0}$. Para finalizar a prova, basta notar que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, e $-\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de $\{T_{-}(t)\}_{t \geq 0}$ e $T(-t)^{-1}$, para $t < 0$, logo $T_{-}(t) = T(-t)^{-1}$, para $t < 0$, portanto, $\{U(t)\}_{-\infty < t < \infty}$ é um C_0-grupo de operadores lineares e limitados.

$\square$

Teorema 2.34. *Seja* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0-*semigrupo de operadores limitados. Se* $0 \in \rho(T(t_0))$ *para algum* $t_0 > 0$ *então* $0 \in \rho(T(t))$ *para todo* $t > 0$ *e* $T(t)$ *pode ser estendido a um* C_0-*grupo.*

Prova: Tendo em vista o Lema 2.33, é suficiente mostrar que $0 \in \rho(T(t))$ para todo $t > 0$. Desde que $0 \in \rho(T(t_0))$, $T(t_0)^n = T(nt_0)$ é injetiva para todo $n \geq 1$. Seja $T(t)x = 0$, escolha n tal que $nt_0 > t$, segue

$$T(nt_0)x = T(nt_0 - t + t)x = T(nt_0 - t)T(t)x = 0,$$

o que implica $x = 0$. Assim, $T(t)$ é injetiva, para todo $t > 0$. Em seguida vamos mostrar que $R(T(t)) = X$, para todo $t > 0$. Para $t \leq t_0$, $R(T(t)) \supset R(T(t_0))$, pela propriedade de semigrupos. Para $t > t_0$, seja $t = kt_0 + t_1$ com $0 \leq t_1 < t_0$. Segue

$$T(t) = T(kt_0 + t_1) = T(kt_0)T(t_1) = T(t_0)^k T(t_1),$$

novamente $R(T(t)) = X$. Assim, $T(t)$ é injetiva e $R(T(t)) = X$ para todo $t > 0$ e pelo Teorema do Gráfico Fechado [4] $0 \in \rho(T(t))$, para todo $t > 0$.

□

Teorema 2.36. *Seja* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0-*semigrupo de operadores lineares e limitados. Se para algum* $s_0 > 0$ $T(s_0) - I$ *é compacto então* $T(t)$ *é invertível para todo* $t > 0$ *e* $T(t)$ *pode ser uma imersão em um* C_0-*grupo.*

Prova: Tendo em vista o Teorema 2.34, é suficiente provar que $T(s_0)$ é invertível. Se $T(s_0)$ não é invertível, então $0 \in \sigma(T(s_0))$, mas por hipótese $T(s_0) - I$ é compacto e assim, 0 é um autovalor de $T(s_0)$ com multiplicidade finita. Seja $x \neq 0$ tal que $T(s_0)x = 0$. Fazendo $s_1 = \frac{s_0}{2}$, temos $T(s_1)T(s_1)x = T(s_0)x = 0$, e 0 ainda é um autovalor de $T(s_1)$. Por indução, definimos a sequência $\{s_n\}$ tal que 0 é um autovalor de $T(s_n)$. Se $N(T(t))$ é o núcleo de $T(t)$, então $N(T(s)) \subset N(T(t))$, para $s \leq t$.

Seja $Q_n = N(T(s_n)) \cap \{x \in X; \|x\|_X = 1\}$. Note que Q_n é uma sequência de subconjuntos não vazios de X. Uma vez que $N(T(s_0))$ tem dimensão finita, Q_0 é compacto

[4]

Teorema 2.35 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach e* T *um operador linear de* X *em* Y*. Então* T *é contínuo se, e somente se,* $G(T)$ *é fechado em* $X \times Y$*.*

Prova: Ver [4], p. 37, Teorema 2.9.

□

e consequentemente $\bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n \neq \varnothing$. Se $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n$, então

$$\|T(s_n)x - x\|_X = \|x\|_X = 1, \quad \text{para todo } s_n. \tag{2.64}$$

Mas $s_n \to 0$ quando $n \to \infty$, logo (2.64) contradiz a continuidade forte de $T(t)$. Isso mostra que $T(s_0)$ é invertível.

$\square$

2.7 A transformada inversa de Laplace

Nesta seção vamos estabelecer uma relação entre um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e seu gerador infinitesimal, uma maneira de fazer isso já foi mostrada no Teorema 2.31. Aqui, vamos utilizar um método diferente chamado transformada de Laplace.

Lema 2.37. *Sejam B um operador linear limitado e $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$. Então*

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda,$$

onde a integral é calculada ao longo do segmento de reta $Re\lambda = \gamma$, além disto, a convergência da integral é uniforme em qualquer intervalo limitado com relação a t.

Prova: Como $\gamma > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$, escolha r tal que $\gamma > r > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$ e seja C_r um círculo de raio r centrado na origem(veja Figura 2.1[5]). Se $\lambda \neq 0$ e $|\lambda| \neq r$, então $r < |1/\lambda|$ e assim, aplicando série de Neumann para $z = \frac{1}{\lambda}$ e $T = B$, segue

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^j B^j = \left(I - \frac{1}{\lambda} B\right)^{-1}, \tag{2.65}$$

multiplicando ambos os lados por λ^{-1},

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-1} \lambda^{-j} B^j = (\lambda I - B)^{-1},$$

ou seja,

$$R(\lambda : B) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{\lambda^{j+1}}, \tag{2.66}$$

[5] Figura extraída da p. 20 de[13]

para $|\lambda| > r$. Ainda pela série de Neumann,

$$\left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} B \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|} \|B\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

já que $|\lambda| > r > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$, implica que

$$\begin{aligned} \left\| \lambda^{-1} \left(I - \frac{1}{\lambda} B \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|} \|B\|_{\mathcal{L}(X)}} \\ &\leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{r} \|B\|_{\mathcal{L}(X)}} \\ &= |\lambda|^{-1} C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva, ou seja,

$$\|R(\lambda : B)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C|\lambda|^{-1}, \quad \text{para todo } |\lambda| > r > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}. \tag{2.67}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.66) por $(1/2\pi i)e^{\lambda t}$ e integrando sobre C_r, obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}} d\lambda,$$

onde a troca da integral com o somatório é justificada por (2.67), que garante a convergência uniforme da série em (2.66), para $|\lambda| \geq r$. Assim, pela fórmula dos coeficientes da série de Taylor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}} d\lambda = \frac{t^j}{j!}, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \ldots,$$

onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}} d\lambda \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j t^j}{j!} \\ &= e^{tB}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Considere agora a região Ω exterior à C_r e à curva C^1 por partes Λ_k dada por

$$\Lambda_k = \bigcup_{l=1}^{4} \Lambda_k^l,$$

onde

$$\begin{aligned}
\Lambda_k^1 &= \{\lambda; \lambda = \gamma + is, -k \leq s \leq k\}, \\
\Lambda_k^2 &= \{\lambda; \lambda = s - ik, -k \leq s \leq \gamma\}, \\
\Lambda_k^3 &= \{\lambda; \lambda = -k + is, -k \leq s \leq k\},
\end{aligned}$$

e

$$\Lambda_k^4 = \{\lambda; \lambda = s + ik, -k \leq s \leq \gamma\},$$

sendo a curva, orientada no sentido anti-horário (veja Figura 2.1). Como o integrando

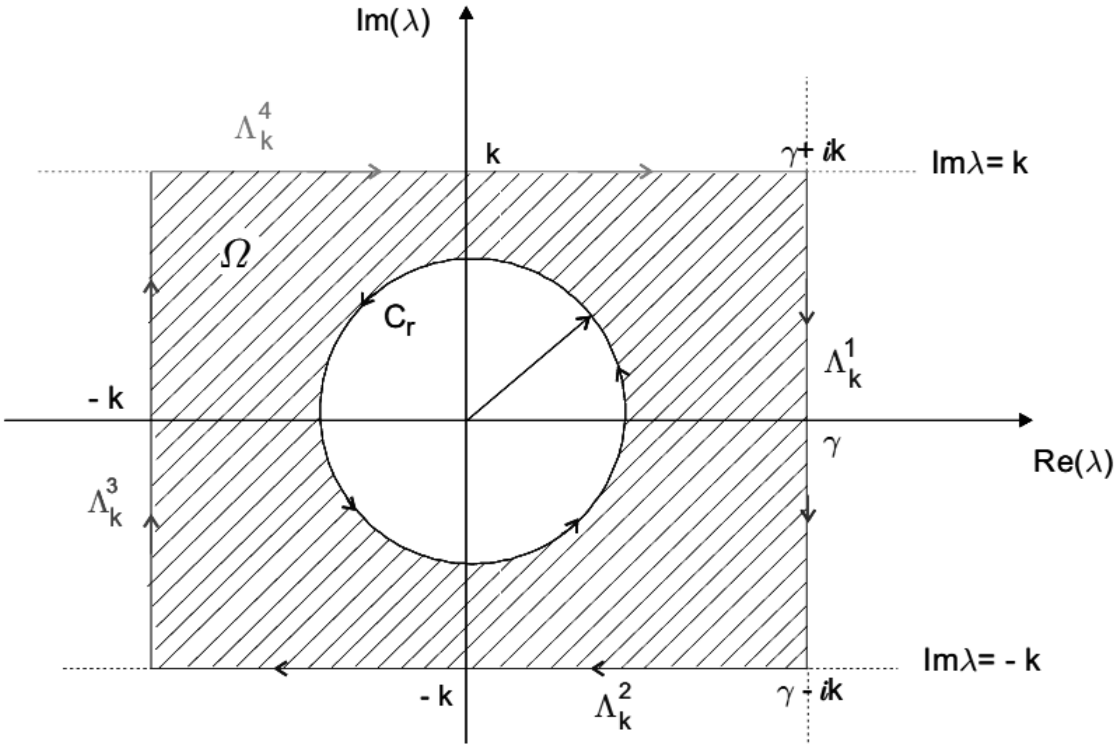

Figura 2.1: Região Ω.

em (2.68) é analítico em Ω segue do Teorema de Cauchy [6], que podemos trocar o

[6]

Teorema 2.38 (Teorema de Cauchy). *Sejam $f : \Omega \to X$ uma função holomorfa em Ω e D um* caminho de integração C_r por Λ_k, isto é,

$$\int_{\Lambda_k} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda = \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda. \tag{2.70}$$

Denotemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Lambda_k^1} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda = \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda. \tag{2.71}$$

Observe que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Lambda_k^j} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda = 0, \quad \text{para todo } j = 2, 3, 4. \tag{2.72}$$

De fato

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Lambda_k^3} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \int_{-k}^{k} e^{Re\lambda t} \|R(\lambda : B)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \\
&\leq \int_{-k}^{k} e^{-kt} \frac{C}{|\lambda|} ds \\
&\leq \int_{-k}^{k} e^{-kt} \frac{C}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds \\
&\leq Ce^{-kt} \int_{-k}^{k} \frac{1}{k} ds \\
&= 2Ce^{-kt} \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Para a curva Λ_k^4, segue

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Lambda_k^4} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \int_{-k}^{\gamma} e^{Re\lambda t} \|R(\lambda : B)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \\
&\leq \int_{-k}^{\gamma} e^{st} \frac{C}{|\lambda|} ds \\
&\leq \int_{-k}^{\gamma} e^{st} \frac{C}{\sqrt{k^2 + s^2}} ds.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

domínio regular em Ω. Segue que

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0. \tag{2.69}$$

Prova: Ver [6], p. 94, Teorema 6.15.

□

Fixando $M > 0$ e $-k < -M$, temos

$$C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds = C\int_{-k}^{-M}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds + C\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds.$$

Escolhendo $M > 0$, suficientemente grande, de maneira que

$$e^{st} < \frac{e}{C}, \text{ para todo } s \in [-k,-M], \tag{2.74}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds &\leq C\frac{e}{C}\int_{-k}^{-M}\frac{ds}{\sqrt{k^2+s^2}} + C\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds\\
&\leq e\int_{-k}^{-M}\frac{ds}{k} + C\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds\\
&\leq \frac{e}{k}(-M+k) + C\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds\\
&\leq \frac{e}{k}k + C\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds\\
&\leq e + C\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds
\end{aligned}$$

ou seja,

$$C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds \leq e + C\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds.$$

Neste caso, dado $e > 0$, fixamos $M > 0$ tal que (2.74) ocorra, assim

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds\right] &\leq e + C\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{-M}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds\\
&\leq e + C\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[\frac{e^{\gamma t}}{k}(\gamma+M)\right]\\
&\leq e, \text{ para todo } e > 0,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds\right] = 0. \tag{2.75}$$

Logo

$$\lim_{k\to\infty}\left[C\int_{-k}^{\gamma}\frac{e^{st}}{\sqrt{k^2+s^2}}ds\right] = 0.$$

Usando (2.73) e (2.66) segue que

$$\int_{\Lambda_k^4} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \to 0, \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Para Λ_k^2, usa-se o mesmo raciocínio de Λ_k^4, obtendo-se

$$\int_{\Lambda_k^2} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda \to 0, \quad \text{quando} \quad k \to \infty. \tag{2.76}$$

Portanto, passando o limite em (2.70) com $k \to \infty$ e (2.71) e (2.72), deduzimos a igualdade

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : B) d\lambda,$$

donde conclui-se a demonstração.

$\square$

Lema 2.39. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}}(X) \leq Me^{\omega t}$. Sejam $\mu \in \mathbb{R}$, tal que $\mu > \omega \geq 0$, e*

$$\mathcal{A}_\mu = \mu \mathcal{A} R(\mu : \mathcal{A}) = \mu^2 R(\mu : \mathcal{A}) - \mu I$$

a aproximação de Yosida de $\mathcal{A}$. Então para $Re\lambda > \dfrac{\omega\mu}{\mu - \omega}$, temos

$$R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) = (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - \mathcal{A}) R\left(\frac{\mu\lambda}{\mu + \lambda} : \mathcal{A}\right) \tag{2.77}$$

e

$$\|R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \left(Re\lambda - \frac{\omega\mu}{\mu - \omega}\right)^{-1}. \tag{2.78}$$

Para $Re\lambda > \epsilon + \frac{\omega\mu}{\mu - \omega}$ e $\mu > 2\omega$, existe uma constante C dependendo somente de μ e ϵ tal que para todo $x \in D(\mathcal{A})$

$$\|R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)x\|_X \leq \frac{C}{|\lambda|}(\|x\|_X + \|\mathcal{A}x\|_X). \tag{2.79}$$

Prova: Para provar (2.77) temos

$$
\begin{aligned}
R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) &= (\lambda - \mathcal{A}_\mu)^{-1} \\
&= (\lambda - \mu\mathcal{A}R(\mu : \mathcal{A}))^{-1} \\
&= (\lambda - \mu\mathcal{A}(\mu I - \mathcal{A})^{-1})^{-1} \\
&= (\mu+\lambda)^{-1}[(\mu+\lambda)(\lambda - \mu\mathcal{A}(\mu I - \mathcal{A})^{-1})^{-1}] \\
&= (\mu+\lambda)^{-1}\{(\mu+\lambda)[(\lambda(\mu I - \mathcal{A}) - \mu\mathcal{A})(\mu I - \mathcal{A})^{-1}]^{-1}\} \\
&= (\mu+\lambda)^{-1}\{(\mu+\lambda)(\mu I - \mathcal{A})[(\lambda(\mu I - \mathcal{A}) - \mu\mathcal{A}]^{-1}\} \\
&= (\mu+\lambda)^{-1}\{(\mu I - \mathcal{A})(\mu+\lambda)[\lambda\mu I - (\lambda+\mu)\mathcal{A}]^{-1}\} \\
&= (\mu+\lambda)^{-1}\left\{(\mu I - \mathcal{A})(\mu+\lambda)(\mu+\lambda)^{-1}\left[\frac{\lambda\mu I}{(\lambda+\mu)} - \mathcal{A}\right]^{-1}\right\} \\
&= (\mu+\lambda)^{-1}(\mu I - \mathcal{A})R\left(\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)} : \mathcal{A}\right).
\end{aligned}
$$

Para provar (2.78) note que $\mathcal{A}_\mu$ é o gerador infinitesimal de $e^{t\mathcal{A}_\mu}$ e por (2.58)

$$\|e^{t\mathcal{A}_\mu}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Mexp\left[t\left(\frac{\omega\mu}{\mu+\omega}\right)\right].$$

Pelo Teorema 2.30

$$\|R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{Re\lambda - \frac{\omega\mu}{\mu+\omega}}.$$

Finalmente, dado que $Re\lambda > \epsilon + \frac{\omega\mu}{\mu-\omega}$, segue de (2.78) que $\|R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-1}$. Se $x \in D(\mathcal{A})$ e $\mu > 2\omega$, então

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_\mu x\|_X &= \|\mu R(\mu : \mathcal{A})\mathcal{A}x\|_X \\
&= \mu\|R(\mu : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)}\|\mathcal{A}x\|_X \\
&\leq \mu\frac{M}{\mu-\omega}\|\mathcal{A}x\|_X \\
&\leq 2M\|\mathcal{A}x\|_X.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\|R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)x\|_X &= \left\|\frac{x}{\lambda} + \frac{R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)\mathcal{A}_\mu x}{\lambda}\right\|_X \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\|x\|_X + \frac{2M^2}{\epsilon}\|\mathcal{A}x\|_X\right) \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\|x\|_X + \|\mathcal{A}x\|_X\right).
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.40. *Seja $\mathcal{A}$ nas condições do Lema 2.39, $\lambda = \gamma + i\eta$ onde $\gamma > \omega + \epsilon$ fixado. Para todo $x \in X$, temos*

$$\lim_{\mu\to\infty} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)x = R(\lambda : \mathcal{A})x \tag{2.80}$$

e para todo $Y > 0$, o limite é uniforme em $|\eta| < Y$.

Prova: Seja $\nu = \frac{\mu\lambda}{\mu+\lambda}$, de (2.77), para μ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned}
& R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) - R(\lambda : \mathcal{A}) \\
= \;& (\lambda+\mu)^{-1}(\mu I - \mathcal{A})R(\nu : \mathcal{A}) - R(\lambda : \mathcal{A}) \\
= \;& (\lambda+\mu)^{-1}\left[(\mu I - \mathcal{A})R(\nu : \mathcal{A}) - (\lambda+\mu)R(\lambda : \mathcal{A})\right] \\
= \;& (\lambda+\mu)^{-1}(\mu I - \mathcal{A})R(\nu : \mathcal{A})\left[I - (\mu I - \mathcal{A})^{-1}(\nu - \mathcal{A})(\mu+\lambda)(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\right] \\
= \;& (\lambda+\mu)^{-1}(\mu I - \mathcal{A})R(\nu : \mathcal{A})\left[(\lambda I - \mathcal{A})(\mu I - \mathcal{A})\right. \\
- \;& \left.(\lambda+\mu)(\nu I - \mathcal{A})\right]R(\mu : \mathcal{A})R(\lambda : \mathcal{A}) \\
= \;& (\lambda+\mu)^{-1}(\mu I - \mathcal{A})R(\nu : \mathcal{A})\left[\lambda\mu I - \lambda\mathcal{A} - \mu\mathcal{A} + \mathcal{A}^2\right. \\
- \;& \left.\lambda\mu I + \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{A}\right]R(\mu : \mathcal{A})R(\lambda : \mathcal{A}) \\
= \;& (\lambda+\mu)^{-1}(\mu I - \mathcal{A})R(\nu : \mathcal{A})\,\mathcal{A}^2 R(\mu : \mathcal{A})R(\lambda : \mathcal{A}) \\
= \;& (\lambda+\mu)^{-1}\mathcal{A}^2 R(\mu : \mathcal{A})(\mu I - \mathcal{A})R(\nu : \mathcal{A})\,R(\lambda : \mathcal{A}) \\
= \;& (\lambda+\mu)^{-1}\mathcal{A}^2 R(\nu : \mathcal{A})\,R(\lambda : \mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Para $\gamma > \omega+\epsilon$ implica que $\gamma-\omega > \epsilon$. Pelo Teorema 2.30 $\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda-\omega} \leq M\epsilon^{-1}$. Dado $Y > 0$, podemos encontrar μ_0 dependendo de Y e γ tal que se $\lambda = \gamma + i\eta$, $|\eta| \leq Y$ e $\mu > \mu_0$, então $Re\frac{\mu\lambda}{\mu+\lambda} > \omega + \frac{\epsilon}{2}$. Assim, para $\mu > \mu_0$ temos $\|R(\mu : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2M\epsilon^{-1}$. Portanto, se $x \in D(\mathcal{A}^2)$ e $\mu > \mu_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)x - R(\lambda : \mathcal{A})x\|_X &\leq \frac{1}{\|\lambda+\mu\|}\|R(\nu : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)}\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)}\|\mathcal{A}^2 x\|_X \\
&\leq \frac{1}{\mu}\frac{2M^2}{\epsilon^2}\|\mathcal{A}^2 x\|_X,
\end{aligned}$$

o que prova (2.80) para $x \in D(\mathcal{A}^2)$. Desde que $D(\mathcal{A}^2)$ é denso em X, usando o Teorema 2.11 e o Lema 2.39 $\|R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uniformemente limitado para $Re\lambda > \omega + \epsilon$ desde que $\omega > \omega + \frac{\omega^2}{\epsilon}$ e pelo Teorema 2.30 o mesmo é válido para $\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)}$, logo (2.80) vale para todo $x \in X$.

□

Teorema 2.41. *Sejam $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}}(X) \leq Me^{\omega t}$ e $\gamma > max(0, \omega)$. Se $x \in D(\mathcal{A})$, então*

$$\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{2.81}$$

e a integral no lado direito converge uniformemente em intervalos limitados com relação a t.

Prova: Seja $\mu > 0$ fixado e seja $\delta > \|\mathcal{A}_\mu\|_X$. Defina

$$\rho_k(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{\lambda s}R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)xd\lambda. \tag{2.82}$$

Integrando ambos os lado de (2.82) de 0 a t e trocando a ordem de integração encontramos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \rho_k(s)ds &= \int_0^t \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{\lambda s}R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)xd\lambda ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)x\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds\right)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)x\left[\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)\right]d\lambda,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^t \rho_k(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{2.83}$$

Integrando $\lambda^{-1}R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)$ no caminho por partes Γ_k, composto do segmento vertical

$$\Gamma_k^{(1)} = \{\delta + i\eta; -k \leq \eta \leq k\}$$

e do semicírculo

$$\Gamma_k^{(2)} = \{\delta + ke^{i\varphi} = \delta + k\cos(\varphi) + i\sin(\varphi); -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

como na Figura 2.2[7]. Segue do teorema de Cauchy (veja Teorema 2.38), que

$$\int_{\Gamma_k} \lambda^{-1}R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)xd\lambda = 0,$$

[7]Figura extraída da p. 24 de [13]

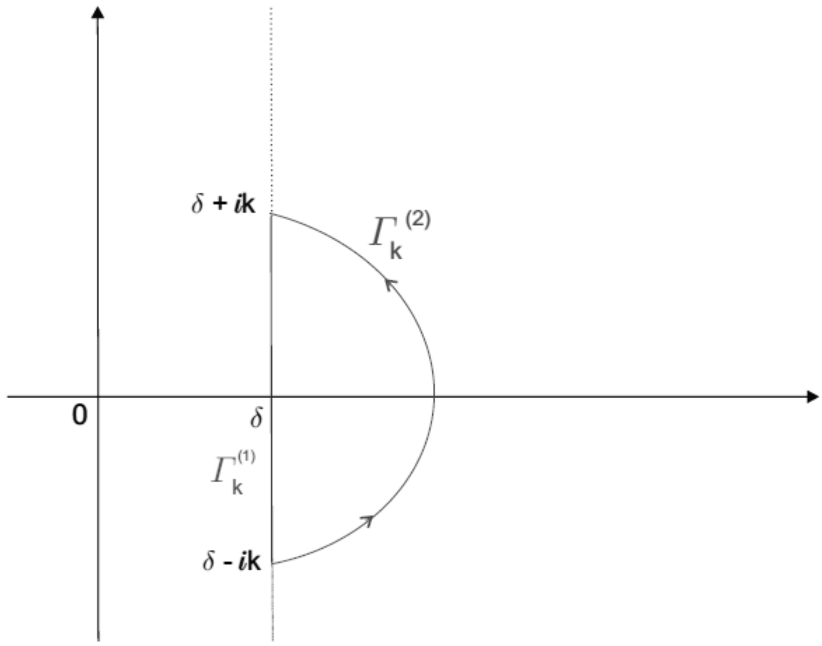

Figura 2.2: Caminho Γ_k.

o que implica

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Gamma_k^{(1)}}\lambda^{-1}R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)xd\lambda+\lim_{k\to\infty}\int_{\Gamma_k^{(2)}}\lambda^{-1}R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)xd\lambda=0. \tag{2.84}$$

Além disso, se $\lambda\in\Gamma_k^{(2)}$ então

$$\begin{aligned}|\lambda| &= \sqrt{(\delta+k\cos(\varphi))^2+k^2\sin^2(\varphi)}\\ &= \sqrt{\delta^2+2\delta k\cos(\varphi)+k^2}\\ &= k\sqrt{\frac{\delta^2}{k^2}+\frac{2\delta\cos(\varphi)}{k}+1},\end{aligned}$$

logo, sendo $\|R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)\|_{\mathcal{L}(X)}\leq C_\mu|\lambda|^{-1}$, para $|\lambda|\geq\delta$, uma vez que $\mathcal{A}_\mu$ é um operador limitado, temos

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{\Gamma^{(2)}} \frac{R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)}{\lambda} x d\lambda \right\|_X &\leq \int_{\Gamma^{(2)}} \left\| \frac{R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)}{\lambda} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X d\lambda \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C_\mu |\lambda|^{-1}}{|\lambda|} \|x\|_X d\varphi \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C_\mu \left(k\sqrt{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta\cos(\varphi)}{k} + 1} \right)^{-1}}{k\sqrt{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta\cos(\varphi)}{k} + 1}} \|x\|_X d\varphi \\
&\leq \frac{1}{k} C_\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \|x\|_X \frac{1}{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta\cos(\varphi)}{k} + 1} d\varphi \\
&\leq \frac{1}{k} \pi C_\mu \|x\|_X, \quad \text{quando } k \to \infty,
\end{aligned}
$$

onde ultima desigualdade é válida observando que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\frac{\delta^2}{k^2} + \frac{2\delta\cos(\varphi)}{k} + 1} = 1.$

$$
\int_{\Gamma^{(2)}} \frac{R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)}{\lambda} x d\lambda \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{2.85}
$$

Usando (2.84) e (2.85) segue que

$$
\lim_{k\to\infty} \int_{\delta - ik}^{\delta + ik} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} = 0. \tag{2.86}
$$

Definindo $h_k(s) := \|\rho(s) - e^{s\mathcal{A}_\mu}\|_X$, temos os seguintes fatos

- $\{h_k\}$ é uma sequência de funções mensuráveis em $[0, t]$, pois, é uma sequência de funções contínuas;
- $h_s \to 0$ quando $k \to \infty$, pois $R(\mu : \mathcal{A})$ e I são lineares e limitados, $\mathcal{A}_\mu$ é um operador linear e limitado, donde, pelo Lema 2.37, $\rho_k(s) \to e^{s\mathcal{A}_\mu} x$, quando $k \to \infty$;
- $|h_k(s)| \leq g(s)$ e $\int_0^t g(s) ds < \infty$. De fato, pela desigualdade triangular,

$$
|h_k(s)| \leq \|\rho_k(s)\|_X + \|e^{s\mathcal{A}_\mu}\|_{\mathcal{L}(X)}.
$$

Considere

$$
\Upsilon_1 = \{\lambda; \lambda = m - ik, -k \leq m \leq \delta\}
$$

$$
\Upsilon_2 = \{\lambda; \lambda = -k + im, -k \leq m \leq k\}
$$

e

$$\Upsilon_3 = \{\lambda; \lambda = m + ik, -k \leq m \leq \delta\}$$

e o círculo C_r de raio r e centro na origem (veja Figura 2.3[8]). Segue, do teorema de

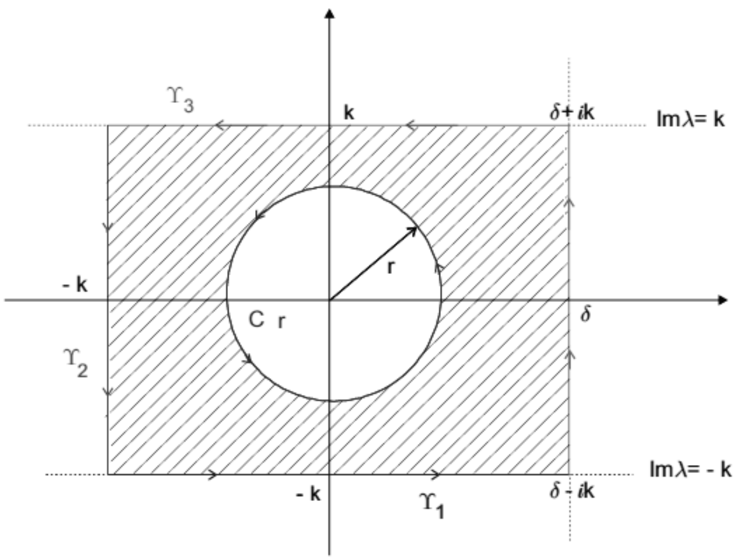

Figura 2.3: $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ e C_r.

Cauchy (veja Teorema 2.38), que

$$\int_{\delta-ik}^{\delta+ik} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda = \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda - \sum_{i=1}^{3} \int_{\Upsilon_i} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda, \quad i = 1, 2, 3,$$

logo, para $i = 1, 2, 3$,

$$\left\| \int_{\delta-ik}^{\delta+ik} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \left\| \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \left\| \sum_{i=1}^{3} \int_{\Upsilon_i} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \tag{2.87}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Upsilon_2} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \int_{-k}^{k} e^{\lambda s} \frac{C}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\ &\leq Ce^{\lambda s} \int_{-k}^{k} \frac{ds}{k} \\ &= Ce^{\lambda s} \frac{1}{k}(k - (-k)) = 2Ce^{\lambda s}, \end{aligned}$$

[8]Figura extraída da p. 25 de [13]

donde,

$$\left\| \int_{\Upsilon_2} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2C = C_1. \tag{2.88}$$

Também,

$$\left\| \int_{\Upsilon_3} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \int_{-k}^{\delta} e^{ms} \frac{C}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm.$$

Fixando $M > 0$ e $-k < -M$ temos

$$C \int_{-k}^{-M} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm.$$

Escolhendo $M > 0$, suficientemente grande, de maneira que

$$e^{ms} < \frac{e}{C}, \text{ para todo } m \in [-k, M],$$

obtemos

$$\begin{aligned}
C \int_{-k}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm &\leq C \frac{e}{C} \int_{-k}^{-M} \frac{dm}{\sqrt{k^2 + m^2}} + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm. \\
&\leq e \int_{-k}^{-M} \frac{dm}{k} + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\
&\leq \frac{e}{k}(-M + k) + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\
&\leq \frac{e}{k} k + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\
&\leq e + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
C \int_{-k}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm &\leq e + C \int_{-M}^{\delta} \frac{e^{ms}}{\sqrt{k^2 + m^2}} dm \\
&\leq \underbrace{e + C \left[\frac{e^{m\delta}}{k} (\delta + M) \right]}_{C_2},
\end{aligned}$$

assim,

$$\left\| \int_{\Upsilon_3} e^{\lambda s} R(\lambda : B) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_2. \tag{2.89}$$

Analogamente, obtemos

$$\left\| \int_{\Upsilon_1} e^{\lambda s} R(\lambda : B) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_2. \tag{2.90}$$

Com relação ao círculo C_r,

$$\left\| \int_{C_r} e^{\lambda s} R(\lambda : B) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{s\|B\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq e^{t\|B\|_{\mathcal{L}(X)}} = C_3. \tag{2.91}$$

De (2.87), (2.88),(2.89),(2.90) e do Lema 2.37,

$$\|\rho(s)\|_X \leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\delta-ik}^{\delta+ik} e^{\lambda s} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) x d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{2\pi}(C_1 + C_2 + C_3) = C_4. \tag{2.92}$$

Com relação a $\|e^{s\mathcal{A}_\mu}\|_X$ temos

$$\begin{aligned} \|e^{s\mathcal{A}_\mu}\|_X &= e^{-s\mu} \|e^{s\mu^2 R(\mu:\mathcal{A})}\| & (2.93)\\ &= e^{-s\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n} s^n \|R(\mu : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)}}{n!}, & (2.94) \end{aligned}$$

pelo Teorema 2.29, obtemos para $\mu > \omega$,

$$\begin{aligned} \|e^{s\mathcal{A}_\mu}\|_X &\leq e^{-s\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n} s^n \|R(\mu : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)}}{n!} \\ &\leq e^{-s\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n} s^n \frac{M}{(\mu-\omega)^n}}{n!} \\ &= M e^{-s\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n} s^n}{(\mu-\omega)^n} n! \\ &= M e^{-s\mu} e^{\frac{\mu^2 s}{\mu-\omega}} \\ &= M e^{\left(\frac{\omega\mu}{\mu-\omega}\right)s} \\ &\leq M e^{2\omega s} = C_5. \end{aligned}$$

Usando (2.91) e (2.92), temos

$$|h_k(s)| \leq C_4 + C_5 = C_6 = h(s)$$

e

$$\int_0^t h(s) ds = \int_0^t C_6 ds < \infty.$$

Assim, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (veja Teorema 1.7)

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t h_k(s)ds = \int_0^t (\lim_{k\to\infty} h_k(s))ds = 0,$$

o que implica,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t \rho_k(s)ds = \int_0^t e^{s\mathcal{A}_\mu}ds. \tag{2.95}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (2.83) e usando (2.86) e (2.95), obtemos

$$\int_0^t e^{s\mathcal{A}_\mu}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{2.96}$$

Pelo Lema 2.39, temos também para $x \in D(\mathcal{A})$,

$$\|R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)x\|_X \leq \frac{C}{|\lambda|}(\|x\|_X + \|\mathcal{A}x\|_X),$$

onde C depende somente de M e γ. Para $\mu \geq \mu_0$, podemos trocar a curva de integração do lado direito de (2.96) de $Re\lambda = \delta$ para $Re\lambda = \gamma$ para obter

$$\int_0^t e^{s\mathcal{A}_\mu}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{2.97}$$

Para justificar essa troca da curva de integração, considere a região Θ delimitada pela curva

$$\Lambda_k = \bigcup_{l=1}^{4}\Lambda_k^l,$$

onde

$$\Lambda_k^1\{\lambda; \lambda = \gamma + i\eta, -k \leq \eta \leq k\},$$

$$\Lambda_k^2\{\lambda; \lambda = \eta - ik, \delta \leq \eta \leq \gamma\},$$

$$\Lambda_k^3\{\lambda; \lambda = \delta + i\eta, -k \leq \eta \leq k\}$$

e

$$\Lambda_k^4\{\lambda; \lambda = \eta + ik, \delta \leq \eta \leq \gamma\}.$$

(veja Figura 2.4[9]). Sendo, $\phi_\mu(\lambda) = \lambda^{-1}e^{\lambda t}R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)x$ é analítica em Θ, pelo Teorema

[9]Figura extraída da p. 29 de [13]

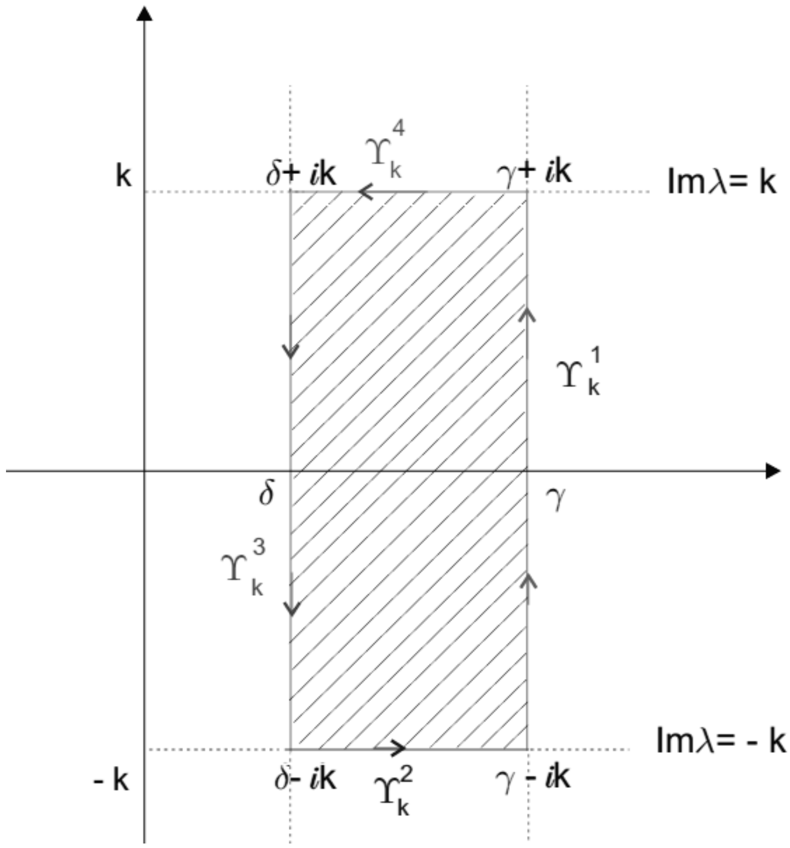

Figura 2.4: Curva Λ_k.

de Cauchy (veja Teorema 2.38)

$$\int_{\Lambda_k^1} \phi_\mu(\lambda)d\lambda + \int_{\Lambda_k^2} \phi_\mu(\lambda)d\lambda + \int_{\Lambda_k^3} \phi_\mu(\lambda)d\lambda + \int_{\Lambda_k^4} \phi_\mu(\lambda)d\lambda = 0 \tag{2.98}$$

e

$$\int_\delta^\gamma e^{\eta t}\frac{d\eta}{\eta^2+k^2} \leq \frac{e^{\eta t}}{k^2}(\delta-\gamma) \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty,$$

onde mostra-se facilmente que

$$\int_{\Lambda_k^j} \phi_\mu(\lambda)d\lambda \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty, \tag{2.99}$$

para $j = 2, 4$. Usando (2.98) e (2.99), segue que

$$\int_{\delta-ik}^{\delta+ik} \lambda^{-1}e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)xd\lambda = \int_{\gamma-ik}^{\gamma+ik} \lambda^{-1}e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)xd\lambda \tag{2.100}$$

e, portanto, (2.97) é verificada. Agora, mostraremos que vale a seguinte igualdade

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_0^t e^{s\mathcal{A}_\mu} x ds = \int_0^t T(t) x ds. \tag{2.101}$$

Para isso, defina $g_\mu(s) := \|e^{s\mathcal{A}_\mu} x - T(s)x\|$. Note que

- $\{g_\mu\}$ é uma sequência de funções mensuráveis, pois $g_\mu(.)$ é uma sequência de funções contínuas;
- $e^{s\mathcal{A}_\mu} x \to T(s)x$, quando $\mu \to \infty$(pelo Teorema 2.31);
- $|g_\mu| \leq k$.

Desta forma, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (veja Teorema 1.7), temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : \mathcal{A}) x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

quando $\mu \to \infty$. Agora defina

$$f_\mu(\lambda) = \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \|(R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) - R(\lambda : \mathcal{A}))x\|_X,$$

onde temos

- $\{f_\mu\}$ é uma sequência de funções mensuráveis, pois $f_\mu(.)$ é contínua;
- $f_\mu(\lambda) \to 0$, quando $\mu \to \infty$ (pelo Teorema 2.31);
- $$\begin{aligned} \|f_\mu(\lambda)\| &= \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \|(R(\lambda : \mathcal{A}_\mu) - R(\lambda : \mathcal{A}))x\|_X \\ &\leq \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} \|(R(\lambda : \mathcal{A}_\mu)\|_{\mathcal{L}(X)} + \|R(\lambda : \mathcal{A}))x\|_X \\ &\leq 2C(\|x\|_X + \|\mathcal{A}x\|_X) \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2} \equiv g(\lambda), \quad (\mu \to \infty); \end{aligned}$$
- $\displaystyle\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} g(\lambda) d\lambda$ é finita. De fato, para $C_7 = 2C(\|x\|_X + \|\mathcal{A}x\|_X)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_7\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2}d\lambda &= C_7e^{\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\gamma^2+\eta^2}\\ &= C_7e^{\gamma t}\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\frac{d\eta}{\gamma^2+\eta^2}\\ &= C_7e^{\gamma t}\frac{1}{\gamma^2}\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\frac{d\eta}{1+(\eta/\gamma)^2}\\ &= C_7e^{\gamma t}\frac{1}{\gamma}\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\frac{dz}{1+z^2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_7\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2}d\lambda &= \frac{C_7}{\gamma}e^{\gamma t}\lim_{k\to\infty}[\arctan(k/\gamma)-\arctan(-k/\gamma)]\\ &= \frac{C_7}{\gamma}e^{\gamma t}[\pi/2-(-\pi/2)]\\ &= \frac{C_7}{\gamma}e^{\gamma t}\pi<\infty,\end{aligned}$$

para todo t em intervalos limitados. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (veja Teorema 1.7),

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_7\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|^2}\|(R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)-R(\lambda:\mathcal{A}))x\|_X d\lambda=0,$$

o que implica

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_7\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2}[(R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)-R(\lambda:\mathcal{A}))x]d\lambda=0,$$

assim

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda:\mathcal{A}_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}\to\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda:\mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda}$$

quando $\mu\to\infty$. Usando (2.101) e (2.97), segue que

$$\int_0^t T(t)sds=\lim_{\mu\to\infty}\int_0^t e^{s\mathcal{A}_\mu}xds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda:\mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda},$$

o que conclui a prova do teorema.

□

Corolário 2.42. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satis-*

fazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. *Seja* $\gamma > \max(0, \omega)$. *Se* $x \in D(\mathcal{A}^2)$, *então*

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : \mathcal{A})x d\lambda, \tag{2.102}$$

e para todo $\delta > 0$, *a integral converge uniformemente para* $t \in [\delta, 1/\delta]$.

Prova: Se $x \in D(\mathcal{A}^2)$, então $\mathcal{A}x \in D(\mathcal{A})$. Usando o Teorema 2.41 para $\mathcal{A}x$, segue do item (iv) do Teorema 2.8 o seguinte

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)\mathcal{A}x ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : \mathcal{A})\mathcal{A}x \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Pela identidade do resolvente $R(\lambda : \mathcal{A})\mathcal{A}x = \lambda R(\lambda : \mathcal{A})x - x$, temos

$$\begin{aligned}
T(t)x - x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : \mathcal{A})\mathcal{A}x \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} (\lambda R(\lambda : \mathcal{A})x - x) \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \left(R(\lambda : \mathcal{A})x - \frac{x}{\lambda}\right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : \mathcal{A})x d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda.
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \frac{x}{\lambda} d\lambda = 2\pi i. \tag{2.103}$$

Para isso considere C_r e Λ_k como no Lema 2.37, mostramos que

$$\int_{\Lambda_k} e^{\lambda t} d\lambda = \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 0} d\lambda = 2\pi i e^{0t}, \tag{2.104}$$

onde a ultima igualdade é válida pela fórmula da integral de Cauchy. Desta forma, aplicando o limite em (2.104), obtemos (2.103). Assim, de (2.103), temos

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : \mathcal{A})x d\lambda.$$

□

Corolário 2.43. *Seja* $\mathcal{A}$ *o gerador infinitesimal de um* C_0-*semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *satis-*

fazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. *Seja* $\gamma > \max(0, \omega)$. *Se* $x \in D(\mathcal{A}^2,)$ *então*

$$\int_0^t (t-s)T(s)xds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda^2} \tag{2.105}$$

e a convergência é uniforme para t em intervalos limitados.

Prova: Integrando (2.81) e 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda s}R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds\right) R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right) R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(e^{\lambda t} - 1\right) R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda^2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Mas

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} R(\lambda : \mathcal{A})x\frac{d\lambda}{\lambda^2} = 0,$$

já provamos isso na prova do Lema 2.37. Portanto (2.105) vale para todo $x \in D(\mathcal{A})$. O lado direito de (2.105) converge na topologia uniforme para um operador e portanto define um operador linear. Desde que $D(\mathcal{A})$ é denso em X, (2.105) vale para todo $x \in X$.

□

Concluímos esta seção com uma importante condição de suficiência, mas não necessária, para um operador $\mathcal{A}$ ser o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Em contraste com os Teoremas 2.29 e 2.30, a condição do Teorema 2.46, que apresentaremos a seguir, muitas vezes são mais fáceis de verificar para exemplos. Mas para apresentarmos este Teorema, precisamos de alguns requisitos.

Definição 2.13. *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ um operador linear fechado com domínio $D(\mathcal{A})$ denso em X. Diremos que $\mathcal{A}$ verifica a **Condição** $\mathcal{A}_{\delta\cup 0}$, onde $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, se a seguinte propriedade for verificada*

$$\sum_{\delta} := \left\{\lambda \in \mathbb{C}; |agr\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup 0 \subset \rho(\mathcal{A}) \tag{2.106}$$

e para cada $0 < \alpha < \delta$ *existem* $0 < \delta' < \delta$ *e* $M_{\delta'} \geq 1$ *tal que*

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_X \leq \frac{M_{\delta'}}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \sum_{\delta'}, \quad \lambda \neq 0. \tag{2.107}$$

Esta **Condição** $\mathcal{A}_{\delta \cup 0}$ é uma importante condição de suficiente para que um operador $\mathcal{A}$ ser o gerador de um C_0-semigrupo. O nosso objetivo a seguir é justificar isto. Para cada $r > 0$, definimos a família de operadores $\{S(t)\}_{t \leq 0}$ dada por

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma(r,\delta')} e^{t\mu} R(\mu : \mathcal{A}) d\mu & t > 0 \\ I & t = 0, \end{cases} \tag{2.108}$$

onde $\gamma(r, \delta') = \gamma_1(r, \delta') \cup \gamma_2(r, \delta') \cup \gamma_3(r, \delta')$ é a curva C_1 por partes definida por

$$\begin{cases} \gamma_1(r, \delta') & = \{\rho e^{i(\pi/2+\delta')}; \rho \in [r, \infty)\}, \\ \gamma_2(r, \delta') & = \{r e^{i\theta}; -\pi/2 - \delta' \leq \theta \leq \pi/2 + \delta'\}, \\ \gamma_3(r, \delta') & = \{\rho e^{-i(\pi/2+\delta')}; \rho \in [r, \infty)\}, \end{cases} \tag{2.109}$$

é orientada no sentido anti-horário, como na Figura 2.5[10].

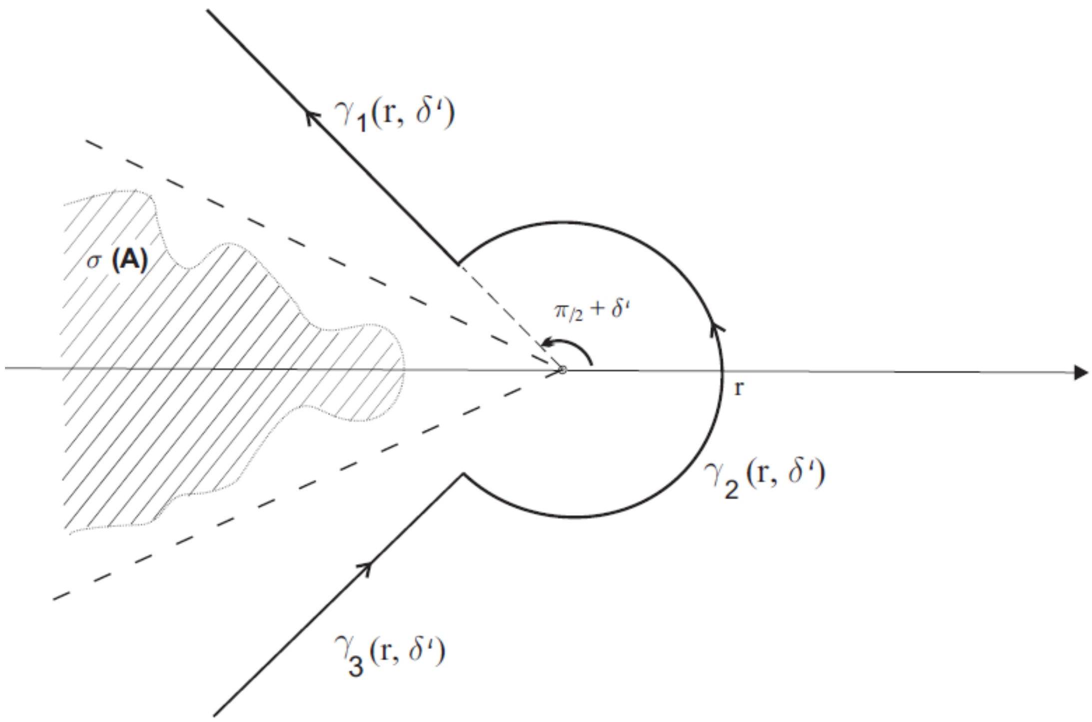

Figura 2.5: Curva $\gamma(r, \delta')$.

[10]Figura extraída da p. 34 de [13]

Lema 2.44. *Se $\mathcal{A}$ verifica a **Condição** $\mathcal{A}_{\delta\cup 0}$, então o operador $S(t)$ está bem definido e é independente de $r > 0$ e de $0 < \delta' < \delta$.*

Prova: Ver [13], p. 34, Lema 1.4.

□

Lema 2.45. *Suponha que $\mathcal{A}$ verifica a **Condição** $\mathcal{A}_{\delta\cup 0}$. Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é a família de operadores definida em (2.108), então as seguintes propriedades são verificadas.*

(i) O operador $S(t)$ é linear e limitado em X. Além disso, existe uma constante $C > 0$ independente de t, tal que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$;

(ii) $S(0) = I$;

(iii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para todos $t, s \geq 0$;

(iv) Para cada $x \in X, S(t)x \to x$, quando $t \to 0^+$.

Prova: Ver [13], p. 37, Teorema 1.5.

□

Teorema 2.46. *Suponha que $\mathcal{A}$ verifica a **Condição** $\mathcal{A}_{\delta\cup 0}$. Então $\mathcal{A}$ é um gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$, para alguma constante C. Além disso,*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} e^{t\lambda} R(\lambda : \mathcal{A})d\lambda, \tag{2.110}$$

onde $\gamma(r,\delta')$ é definida como em (2.109).

Prova: Seja

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} e^{\mu t} R(\mu : \mathcal{A})d\mu. \tag{2.111}$$

Considere $\rho > r$ e $\Gamma(\rho, r, \delta') = \Upsilon(\rho, r, \delta') \cup \Lambda(\rho, \delta')$, com $\Upsilon(\rho, r, \delta')$ e $\Lambda(\rho, \delta')$ curvas de classe C_1 por partes descritas na forma

$$\Lambda(\rho, \delta') = \left\{\rho e^{i\theta} : -\frac{\pi}{2} - \delta' \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \delta'\right\},$$

$$\Upsilon(\rho, r, \delta') = \bigcup_{l=1}^{3} \Upsilon_l(\rho, r, \delta'),$$

onde

$$\Upsilon_1(\rho, r, \delta') = \{se^{i(\pi/2+\delta')}; s \in [r, \rho]\},$$

$$\Upsilon_2(\rho, r, \delta') = \{re^{i\theta}; -\frac{\pi}{2} - \delta' \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \delta'\},$$

$$\Upsilon_3(\rho, r, \delta') = \{se^{-i(\pi/2+\delta')}; s \in [r, \rho]\},$$

orientadas de maneira que $\Lambda(\rho, \delta')$ seja descrita no sentido anti-horário. Veja Figura 2.6[11]. Pela fórmula da integral de Cauchy,

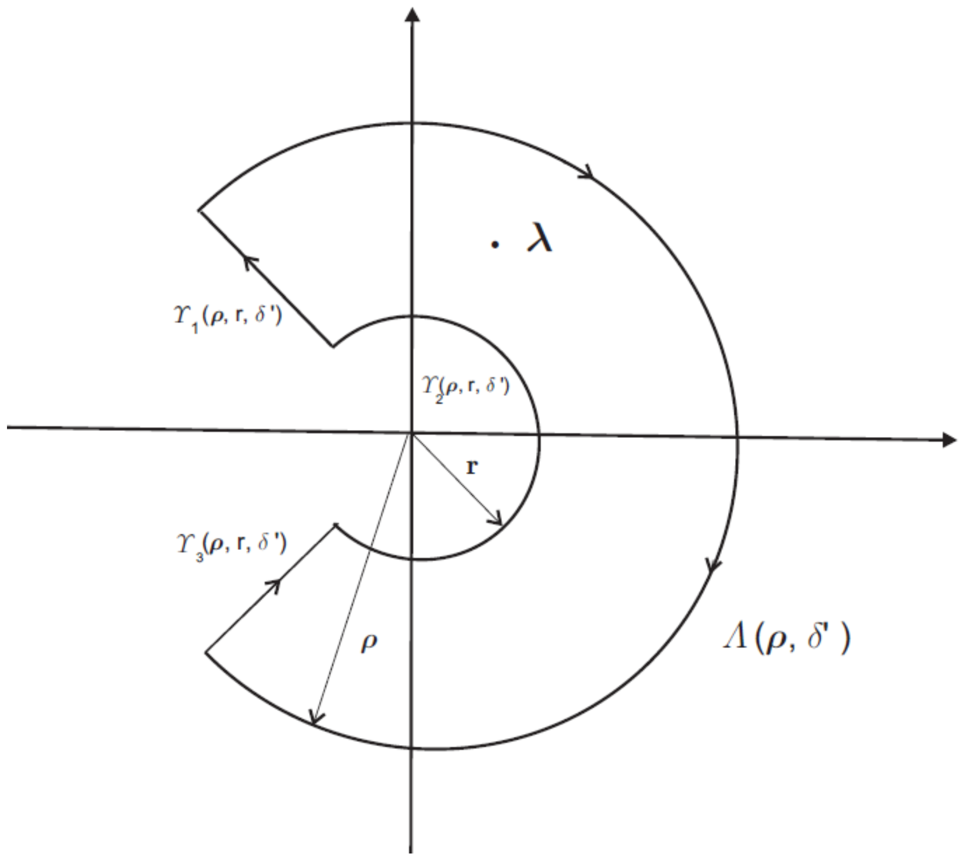

Figura 2.6: Curva $\Gamma(\rho, r, \delta)$.

$$R(\lambda : \mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\rho,r,\delta')} \frac{R(\mu : \mathcal{A})}{\mu - \lambda} d\mu,$$

ou seja,

$$R(\lambda : \mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon(\rho,r,\delta')} \frac{R(\mu : \mathcal{A})}{\mu - \lambda} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\rho,\delta')} \frac{R(\mu : \mathcal{A})}{\mu - \lambda} d\mu. \tag{2.112}$$

Note que ao longo da curva $\Lambda(\rho, \delta')$ sendo $|\mu - \lambda| \geq |\mu| - |\lambda| = \rho - |\lambda| >, 0$ quando

[11]Figura extraída da p. 44 de [13]

$\rho \to \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Gamma(\rho,\delta')} \frac{R(\mu:\mathcal{A})}{\mu-\lambda} d\mu \right\| &\leq \int_{\Gamma(\rho,\delta')} \frac{\|R(\mu:\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)}}{|\mu-\lambda|} d\mu \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{M_{\delta'}}{|\mu-\lambda||\mu|} d\theta \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{M_{\delta'}}{(|\mu|-|\lambda|)\,|\mu|} d\theta \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{M_{\delta'}}{(|\rho e^{i\theta}|-|\lambda|)\,|\rho e^{i\theta}|} d\theta \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \frac{M_{\delta'}}{(\rho-|\lambda|)\,\rho} d\theta \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{M_{\delta'}}{\rho-|\lambda|} \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} d\theta \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{M_{\delta'}}{\rho-|\lambda|} 2\left(\frac{\pi}{2}+\delta'\right) \to 0, \quad \text{quando } \rho \to \infty. \qquad (2.113)
\end{aligned}$$

Passando o limite com $\rho \to \infty$ em (2.112) obtemos

$$R(\lambda:\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} \frac{R(\mu:\mathcal{A})}{\mu-\lambda} d\mu. \qquad (2.114)$$

Por outro lado, usando a representação de $U(t)$ e o teorema de Fubini, (veja Teorema 1.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_{\gamma(r,\delta')} e^{\mu t} R(\mu:\mathcal{A}) d\mu \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} R(\mu:\mathcal{A}) \left(\int_0^\infty e^{(\mu-\lambda)t} dt \right) d\mu,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} \frac{R(\mu:\mathcal{A})}{\mu-\lambda} d\mu. \qquad (2.115)$$

Usando (2.114) e (2.115),

$$R(\lambda:\mathcal{A}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt. \qquad (2.116)$$

Pelo Lema 2.45, $U(t)$ um C_0-semigrupo tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \quad t > 0.$$

Na observação 2.4, tomando $\omega = 0$ mostra-se que $\|R(\lambda : \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C}{Re\lambda^n}$, logo, pelo Teorema 2.30, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de em C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$. Resta-nos provar (2.110). Seja $x \in D(\mathcal{A}^2)$. Pelo Lema 2.42, segue que

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A})x d\lambda. \tag{2.117}$$

Agora, considere o caminho Λ_k dado por

$$\Lambda_k = \bigcup_{l=1}^{4}\Lambda_k^l,$$

onde

$$\Lambda_k^1 = \{\lambda; \lambda = \gamma + is, -k \leq s \leq k\},$$

$$\Lambda_k^2 = \{\lambda; \lambda = s - ik, -k \leq s \leq \gamma\},$$

$$\Lambda_k^3 = \bigcup_{i=1}^{3}\Upsilon_i(k, r, \delta'),$$

onde

$$\Upsilon_1(k, r, \delta') = \{se^{i(\pi/2+\delta')}; s \in [r, k]\},$$

$$\Upsilon_2(k, r, \delta') = \{re^{iv}; -\frac{\pi}{2} - \delta' \leq v \leq \frac{\pi}{2} + \delta'\},$$

$$\Upsilon_3(k, r, \delta') = \{se^{-i(\pi/2+\delta')}; s \in [r, k]\},$$

e

$$\Lambda_k^4 = \{\lambda; \lambda = s + ik, -k \leq s \leq \gamma\},$$

orientado no sentido anti-horário.(veja Figura 2.7[[12]]).

Denotemos

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Lambda_k^1} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A})d\lambda = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A}),$$

de modo análogo ao que fizemos para obter (2.76), temos para

$$\int_{\Lambda_k^j} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A})d\lambda \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty, \quad j = 2, 4.$$

Desta forma, podemos trocar o caminho de integração em (2.117) para $\gamma(r, \delta')$ e, por conseguinte,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} e^{\lambda t}R(\lambda : \mathcal{A})x d\lambda = U(t)x, \tag{2.118}$$

[12]Figura extraída da p. 48 de [13]

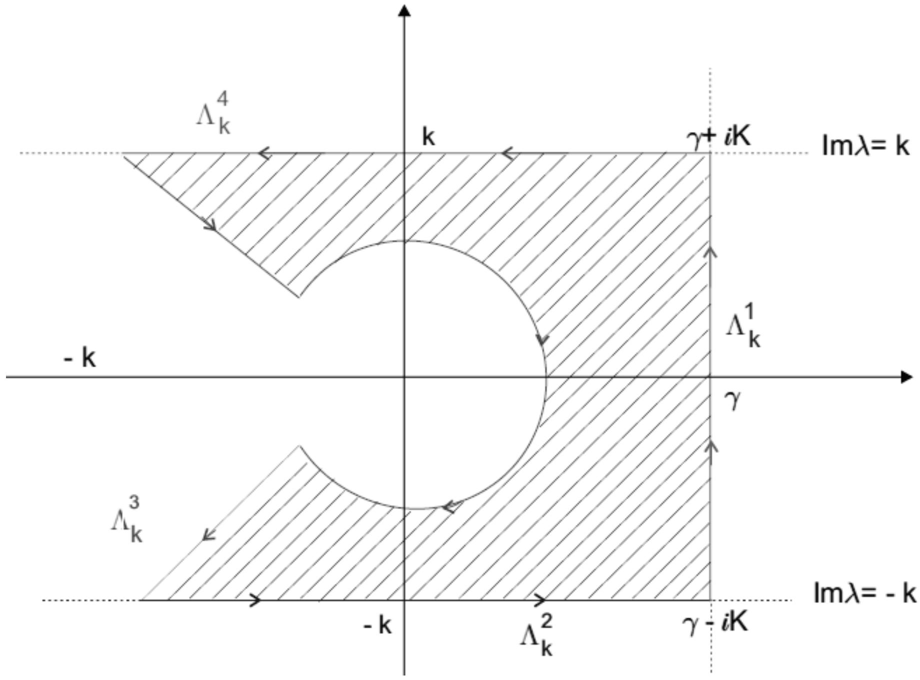

Figura 2.7: Caminho Λ_k.

para todo $x \in D(\mathcal{A}^2)$. Sendo $D(\mathcal{A}^2)$ denso em X, segue que (2.118) vale para todo $x \in X$, o que conclui a demonstração.

□

2.8 O dual de um semigrupo

Seja $\mathcal{S}$ um operador linear com domínio, $D(\mathcal{S})$, em X. Lembre-se que o adjunto $\mathcal{S}^*$ de $\mathcal{S}$ é um operador linear de $D(\mathcal{S}^*) \subset X^* \to X^*$ definido da seguinte maneira

$$D(\mathcal{S}^*) = \{x^* \in X^*; \exists\, y^* \in X^*; \langle x^*, \mathcal{S}x\rangle = \langle y^*, x\rangle, \text{ para todo } x \in D(\mathcal{S})\}. \quad (2.119)$$

Se $x^* \in D(\mathcal{S}^*)$, então $y^* = \mathcal{S}^*x^*$ onde y^* é o elemento de X^* que satisfaz (2.119).

Lema 2.47. *Seja $\mathcal{S}$ um operador limitado em X. Então $\mathcal{S}^*$ é um operador limitado em X^* e $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\mathcal{S}^*\|_{\mathcal{L}(X^*)}$.*

Prova: Para todo $x^* \in X^*$, $\langle x^*, \mathcal{S}x\rangle$ é um funcional linear limitado em X, pelo teorema da representação de Riesz [13], existe um único elemento $y^* \in X^*$, para o qual

[13]

Teorema 2.48 (Representação de Riesz)**.** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)^*$. Então existe uma única*

$\langle y^*, x\rangle = \langle x^*, \mathcal{S}x\rangle$ e então $D(\mathcal{S}^*) = X^*$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}^*\|_{\mathcal{L}(X^*)} &= \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} \|\mathcal{S}x^*\|_{X^*} \\
&= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle \mathcal{S}^*x^*, x\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\langle x^*, \mathcal{S}x\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \|\mathcal{S}x\|_X \\
&= \|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(X)}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.49. *Seja $\mathcal{A}$ um operador densamente definido em X. Se $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, então $\lambda \in \rho(\mathcal{A}^*)$ e*

$$\rho(\lambda : \mathcal{A}^*) = \rho(\lambda : \mathcal{A})^*.$$

Prova: Pela definição de adjunto, temos $(\lambda I - \mathcal{A})^* = \lambda I^* - \mathcal{A}^*$, onde I^* é o operador identidade em X^*. Desde que $R(\lambda : \mathcal{A})$ é um operador linear limitado em X, pelo Lema 2.47, $R(\lambda : \mathcal{A})^*$ é um operador linear e limitado em X^*. Note que $\lambda I^* - \mathcal{A}^*$ é injetiva. De fato, suponha $x^* \neq 0$ e $(\lambda I^* - \mathcal{A}^*)x^* = 0$, então

$$0 = \langle (\lambda I^* - \mathcal{A}^*)x^*, x\rangle = \langle (\lambda I - \mathcal{A})^*x^*, x\rangle = \langle x^*, (\lambda I - \mathcal{A})x\rangle, \text{ para todo } x \in D(\mathcal{A}).$$

Mas $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ e portanto $x^* = 0$. O que é absurdo, logo $\lambda I^* - \mathcal{A}^*$ é injetiva. Agora, se $x \in X$, $x^* \in D(\mathcal{A})$, então

$$\langle x^*, x\rangle = \langle x^*, (\lambda I - \mathcal{A})R(\lambda : \mathcal{A})x\rangle = \langle (\lambda I - \mathcal{A})^*x^*, R(\lambda : \mathcal{A})x\rangle,$$

além disso,

$$R(\lambda : \mathcal{A})^*(\lambda I^* - \mathcal{A}^*)x^* = x^*, \text{ para todo } x \in D(\mathcal{A}^*). \tag{2.120}$$

---

função $u \in L^{p'}$ tal que

$$\langle \varphi, f\rangle = \int uf, \text{ para todo } f \in L^p.$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)^*}.$$

Prova: Ver [4], p. 97, Teorema 4.11.

□

Por outro lado, se $x^* \in X^*$ e $x \in D(\mathcal{A})$, então

$$\langle x^*, x\rangle \;=\; \langle x^*, R(\lambda : \mathcal{A})(\lambda I - \mathcal{A})x\rangle = \langle R(\lambda : \mathcal{A})^* x^*, (\lambda I - \mathcal{A})x\rangle,$$

o que implica

$$(\lambda I^* - \mathcal{A}^*)R(\lambda : \mathcal{A})^* x^* = x^*, \text{ para todo } x \in X^*. \tag{2.121}$$

Usando (2.120) e (2.121) segue que $\lambda \in \rho(\mathcal{A}^*)$ e que $R(\lambda : \mathcal{A}^*) = R(\lambda : \mathcal{A})^*$.

□

Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X. Para $t > 0$ seja $T(t)^*$ o operador adjunto de $T(t)$. Da Definição de operador adjunto fica claro que a família $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$, de operadores lineares e limitados em X^*, satisfaz as propriedades de semigrupo. Por isso, essa família é chamada de semigrupo adjunto de $T(t)$. O semigrupo adjunto contudo, não necessariamente é um C_0-semigrupo em X^* já que a aplicação $T(t) \mapsto T(t)^*$ não necessariamente conserva a continuidade forte de $T(t)$.

Antes de enunciar e provar o resultado principal desta seção que estabelece a relação entre os semigrupos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ e seus geradores infinitesimais nós precisamos de mais uma definição.

Definição 2.14. *Sejam $\mathcal{S}$ um operador linear em X e Y um subespaço de X. O operador $\tilde{\mathcal{S}}$ onde $D(\tilde{\mathcal{S}}) = \{x \in D(\mathcal{S}) \cap Y; \mathcal{S}x \in Y\}$ definido por $\tilde{\mathcal{S}}x = \mathcal{S}x$, para todo $x \in D(\tilde{\mathcal{S}})$, é chamado de parte de $\mathcal{S}$ em Y.*

Teorema 2.50. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X com o gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ e seja $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ o seu semigrupo adjunto. Se $\mathcal{A}^*$ é o adjunto de $\mathcal{A}$ e Y^* é o fecho de $D(\mathcal{A}^*)$ em X^* então a restrição $T(t)^+$ de $T(t)^*$ a Y^* é um C_0-semigrupo em Y^*. O gerador infinitesimal $\mathcal{A}^+$ de $T(t)^+$ é a parte de $\mathcal{A}^*$ em Y^*.*

Prova: Uma vez que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, pelo Teorema 2.30 existem constates ω e M tais que para todo real λ, $\lambda > \omega$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.122}$$

Usando os Lemas 2.47 e 2.49 segue que se $\lambda > \omega, \lambda \in \rho(\mathcal{A}^*)$ então

$$\|(R(\lambda : \mathcal{A})^*)^n\|_{\mathcal{L}(X)} = \|R(\lambda : \mathcal{A}^*)^n\|_{\mathcal{L}(X)} = \|R(\lambda : \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.123}$$

Seja $J(\lambda)$ restrição de $R(\lambda : \mathcal{A}^*)$ em Y^*. Temos

$$\|J(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \tag{2.124}$$

e pela identidade do resolvente

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu), \quad \text{para todos } \lambda, \mu > \omega, \tag{2.125}$$

e ainda pelo Lema 2.15

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda J(\lambda)x^* = x^*, \text{ para todo } x^* \in Y^*. \tag{2.126}$$

Usando (2.125), (2.126) e o Corolário[14] segue que $J(\lambda)$ é um resolvente de um operador linear fechado $\mathcal{A}^+$, densamente definido em Y^*. Desse fato e de (2.124), o Teorema 2.30 afirma que $\mathcal{A}^+$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)^+$ em Y^*. Para $x \in X$ e $x^* \in Y^*$ temos por definição

$$\left\langle x^*, \left(I - \frac{t}{n}\mathcal{A}\right)^{-n} x \right\rangle = \left\langle \left(I - \frac{t}{n}\mathcal{A}^+\right)^{-n} x^*, x \right\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.128}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (2.128) e usando o Teorema [15], temos

$$\langle x^*, T(t)x\rangle = \langle T(t)^+x^*, x\rangle \tag{2.129}$$

e para $x^* \in Y^*$, $T(t)^*x^* = T(t)^+x^*$ e $T(t)^+$ é a restrição de $T(t)^*$ em Y^*. Para concluir a prova, vamos mostrar que $\mathcal{A}^+$ é a parte de $\mathcal{A}^*$ em Y^*. Seja $x^* \in D(\mathcal{A}^*)$ tal que

[14]

Corolário 2.51. *Sejam Δ um subconjunto ilimitado de $\mathbb{C}$ e $J(\lambda)$ um pseudo resolvente em Δ. Se existe uma sequência $\{\lambda_n\} \in \Delta$ tal que $|\lambda_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n J(\lambda_n)x = x, \quad \textit{para todo } x \in X, \tag{2.127}$$

então $J(\lambda)$ é o resolvente de um único operador linear fechado $\mathcal{A}$, densamente definido.

Prova: Ver [12]. p.37 Corolário 9.5

[15]

Teorema 2.52. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X. Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então*

$$T(t)x = \lim_{h\to 0^+} \left(I - \frac{t}{n}\mathcal{A}\right)^{-n} x = \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t} : \mathcal{A}\right)\right]^n x, \quad \textit{para todo } x \in X$$

e o limite é uniforme em t em qualquer intervalo limitado.

Prova: Ver [12]. p.33 Teorema 8.3

$x^* \in Y^*$ e $\mathcal{A}^*x^* \in Y^*$. Segue que $(\lambda I^* - \mathcal{A}^*)x^* \in Y^*$ e

$$J(\lambda)(\lambda I^* - \mathcal{A}^*)x^* = (\lambda I^* - \mathcal{A}^+)^{-1}(\lambda I^* - \mathcal{A}^*)x^* = x^* \tag{2.130}$$

Assim, $x^* \in D(\mathcal{A}^+)$ e aplicando $(\lambda I - \mathcal{A}^+)$ em (2.130), temos $(\lambda I^* - \mathcal{A}^*)x^* = (\lambda I - \mathcal{A}^*)x^*$, logo, $\mathcal{A}^+x^* = \mathcal{A}^*x^*$. Portanto $\mathcal{A}^+$ é a parte de $\mathcal{A}^*$ em Y^*.

□

No caso especial onde X é um espaço de Banach reflexivo, temos o seguinte lema.

Lema 2.53. *Seja $\mathcal{S}$ um operador fechado densamente definido em X, onde X é um espaço de Banach reflexivo. Então $D(\mathcal{S}^*)$ é denso em X^*.*

Prova: Se $D(\mathcal{S}^*)$ não é denso em X, então existe um elemento $x_0 \in X$ tal que $x_0 \neq 0$ e $\langle x^*, x_0 \rangle = 0$ para todo $x^* \in D(\mathcal{S}^*)$. Desde que $\mathcal{S}$ é fechado e seu gráfico $X \times X$ é fechado e não contém $(0, x_0)$. Como consequência do teorema de Hahn-Banach [16], existem $x_1^*, x_2^* \in X^*$ tais que

$$\langle x_1^*, x \rangle - \langle x_2^*, \mathcal{S}x \rangle = 0, \text{ para todo } x \in D(\mathcal{S})$$

e

$$\langle x_1^*, 0 \rangle - \langle x_2^*, x_0 \rangle \neq 0.$$

A segunda equação mostra que $x_2^* \neq 0$ e que $\langle x_2^*, x_0 \rangle \neq 0$, mas da primeira equação seque que $x_2^* \in D(\mathcal{S}^*)$, o que implica $\langle x_2^*, x_0 \rangle = 0$, o que é uma contradição. Assim, $\overline{D(\mathcal{S}^*)} = X^*$.

[16]

Teorema 2.54 (Hanh-Banach)**.** *Seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x), \quad \text{para todo } x \in X \quad e \quad \text{para todo } \lambda > 0 \\ p(x+y) &= p(x) + p(y), \quad \text{para todos } x, y \in X. \end{aligned}$$

Seja $Y \subset X$ um subespaço linear e seja $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in Y.$$

Sobre essas hipóteses, existe um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que estende g, isto é, $g(x) = f(x)$ para todo $x \in Y$, e que

$$f(x) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in Y.$$

Prova: Ver [4]. p.1 Teorema 1.1

□

$\square$

Corolário 2.55. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X com o gerador infinitesimal $\mathcal{A}$. O semigrupo adjunto $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$ de $T(t)$ é um C_0-semigrupo em X^* que tem como gerador infinitesimal o adjunto $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$.*

Prova: É uma consequência imediata do Teorema 2.50 e do Lema 2.53.

Definição 2.15. *Seja H um espaço de Hilbert com produto escalar $(,)$. Um operador $\mathcal{A}$ em H é dito simétrico se $\overline{D(\mathcal{A})} = H$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$, isto é, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ para todo $x, y \in D(\mathcal{A})$. $\mathcal{A}$ é dito auto-adjunto se $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Um operador limitado $\mathcal{U}$ em H é unitário se $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$.*

Antes de enunciar e provar o teorema de Stones, apresentaremos dois fatos sem apresentar suas respectivas demonstrações.

(1) Todo operador adjunto é fechado;

(2) O operador $\mathcal{U}(t)$ é unitário se, e somente se $R(\mathcal{U}(t)) = H$ e $\mathcal{U}(t)$ é uma isometria.

Teorema 2.56 (Stone)**.** *O operador $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores unitários em um espaço de Hilbert se, e somente se $i\mathcal{A}$ é auto-adjunto.*

Prova: Se $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores unitários $\{\mathcal{U}(t)\}_{t\geq 0}$, então $\mathcal{A}$ é densamente definido, pelo Corolário 2.9, e para $x \in D(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}x &= \lim_{t\to 0^+} t^{-1}(\mathcal{U}(-t)x - x) \\ &= \lim_{t\to 0^+} t^{-1}(\mathcal{U}(t)^{-1}x - x) \\ &= \lim_{t\to 0^+} t^{-1}(\mathcal{U}(t)^{*}x - x) \\ &= \mathcal{A}^*x, \end{aligned} \tag{2.131}$$

o que implica que $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$ e portanto $i\mathcal{A} = -i\mathcal{A}^* = (i\mathcal{A})^*$, ou seja, $i\mathcal{A}$ é auto-adjunto. A segunda igualdade é válida porque $\mathcal{U}(-t)$ e $\mathcal{U}(t)^{-1}$ tem o mesmo gerador infinitesimal e a terceira igualdade é pela Definição 2.15. Reciprocamente, se $i\mathcal{A}$ é auto-adjunto, então $\mathcal{A}$ é densamente definido e $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$. Assim, para todo $x \in D(\mathcal{A})$, temos

$$(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = -(x, \mathcal{A}x) = -\overline{(\mathcal{A}x, x)}.$$

Logo, $Re(\mathcal{A}x, x) = 0$ para todo $x \in D(\mathcal{A})$, isto é, $\mathcal{A}$ é dissipativo. Uma vez que $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$, então $Re(\mathcal{A}^*x, x) = 0$, para todo $x \in D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A})$, daí $\mathcal{A}^*$ é dissipativo. Sabemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são operadores fechados e desde que $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$, segue que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ são geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de contração em H (veja

Corolário 2.25). Se $\mathcal{U}_+(t)$ e $\mathcal{U}_-(t)$ são semigrupos gerados por $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ respectivamente, definimos

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} \mathcal{U}_+(t) & \text{se} \quad t \geq 0 \\ \mathcal{U}_-(-t) & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Pelo que vimos na seção 2.6, $\mathcal{U}(t)$ é um grupo de operadores lineares e limitados e desde que

(i) $\mathcal{U}(t)^{-1} = \mathcal{U}(-t)$;

(ii) $\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$;

(iii) $\|\mathcal{U}(-t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$.

segue que $R(\mathcal{U}(t)) = X$ e $\mathcal{U}(t)$ é uma isometria para todo $t \geq 0$. Portanto $\mathcal{U}(t)$ é um grupo de operadores unitários em H.

□

2.9 Perturbações e aproximações

Teorema 2.57. *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em X satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$. Se $\mathcal{B}$ é um operador linear e limitado em X, então $\mathcal{C} := \mathcal{A}+\mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em X satisfazendo $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\omega+M\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(X)})t}$.*

Neste caso dizemos que o gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ é perturbado pelo operador $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{B}$ é uma perturbação de $\mathcal{A}$.

Prova: De fato, por hipótese $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, então $\|e^{-\omega t}T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$. Se definirmos $\mathcal{T}(t) = e^{-\omega t}T(t)$, então $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, cujo o gerador infinitesimal é $\mathcal{A} + \omega I$, que satisfaz $\|\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, e portanto, considerando a norma

$$|.| : X \to \mathbb{R}$$

definida em (2.49), por (2.51) temos

$$|\mathcal{T}(t)x| \leq |x|,$$

o que implica

$$|e^{-\omega t}T(t)x| \leq |x|,$$

ou seja, $|T(t)| \leq e^{\omega t}$. Segue do Teorema 2.30 que $|R(\lambda : \mathcal{A})| \leq (\lambda - \omega)^{-1}$, para todo real λ, $\lambda > \omega$. Assim, para $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda I - \mathcal{C} &= \lambda I - \mathcal{A} - \mathcal{B} \\
&= \lambda I - \mathcal{A} - \mathcal{B}(R(\lambda : \mathcal{A})(\lambda I - \mathcal{A})) \\
&= (\lambda I - \mathcal{A}) - \mathcal{B}(R(\lambda : \mathcal{A})(\lambda I - \mathcal{A})) \\
&= (I - \mathcal{B}R(\lambda : \mathcal{A}))(\lambda I - \mathcal{A}). \qquad (2.132)
\end{aligned}$$

Desde que $\lambda I - \mathcal{A}$ é bijetiva, então $\lambda I - \mathcal{C}$ é bijetiva, ou seja, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ se, e somente se

$$I - \mathcal{B}R(\lambda : \mathcal{A})$$

é invertível em $\mathcal{L}(X)$. Neste caso, aplicando a inversa em ambos os lados de (2.132), obtemos

$$\begin{aligned}
R(\lambda : \mathcal{C}) &= (\lambda I - \mathcal{C})^{-1} \\
&= [(I - \mathcal{B}R(\lambda : \mathcal{A}))(\lambda I - \mathcal{A})]^{-1} \\
&= (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}(I - \mathcal{B}R(\lambda : \mathcal{A}))^{-1} \\
&= R(\lambda : \mathcal{A})(I - \mathcal{B}R(\lambda : \mathcal{A}))^{-1}. \qquad (2.133)
\end{aligned}$$

Observe ainda que para $\lambda > \omega + |\mathcal{B}|$ temos

$$|\mathcal{B}R(\lambda : \mathcal{A})| \leq |\mathcal{B}||R(\lambda : \mathcal{A})| \leq |\mathcal{B}|\frac{1}{\lambda - \omega} < 1.$$

Então, para todo $\lambda \in \rho(\mathcal{C})$, podemos reescrever (2.133) usando a Série de Neumann do seguinte modo

$$R(\lambda : \mathcal{C}) = R(\lambda : \mathcal{A}) \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}R(\lambda : \mathcal{A})^k.$$

Calculando sua norma, temos

$$\begin{aligned}
|R(\lambda : \mathcal{C})| &\leq |R(\lambda : \mathcal{A})|| \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}R(\lambda : \mathcal{A})^k| \\
&\leq \frac{1}{\lambda - \omega} \frac{1}{1 - |\mathcal{B}|/(\lambda - \omega)} \\
&= \frac{1}{\lambda - \omega - |\mathcal{B}|}.
\end{aligned}$$

Usando o Corolário 2.20, segue que $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um um

C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em X satisfazendo $|S(t)| \leq e^{(\omega+|\mathcal{B}|)t}$. Retornando à norma original $\|.\|$ em X, temos

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\omega+M\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(X)})t}.$$

$\square$

Capítulo 3

O operador de ondas em $\mathbb{R}^N$

A teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados tem muitas aplicações na análise. Neste capítulo apresentaremos uma aplicação dessa teoria à soluções de problemas de valor inicial, mais especificamente estudaremos a solução da equação de ondas, via teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados. Iremos apresentar o C_0-grupo associado ao operador de ondas no $\mathbb{R}^N$, e o C_0-semigrupo associado ao operador de ondas amortecidas no $\mathbb{R}^N$.

Usaremos alguns resultados básicos da teoria geral de equações diferenciais parciais, sem provas, quando necessário.

3.1 Equação de ondas

A equação de ondas é a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \tag{3.1}$$

para uma função $u = u(x,t)$ de $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$. Abreviadamente, escrevemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u. \tag{3.2}$$

Esta é comumente complementada por condições iniciais, especificamente em $t = 0$. Uma vez que, esta é uma equação de segunda ordem no tempo, o valor inicial e a derivada no tempo inicial são usualmente especificadas

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x),$$

onde u e v são funções dadas em $\mathbb{R}^N$.

Note que a equação de ondas é definitivamente uma equação diferencial parcial não elíptica, já que o sinal da derivada de segunda ordem em t é o oposto do sinal das derivadas espaciais. Veremos em breve que as soluções das equações de ondas possuem uma característica muito diferente das soluções das equações elípticas.

Observação 3.1. *Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função duas vezes derivável, e ω é um vetor unitário em $\mathbb{R}^N$. Então $u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$u(x,t) = h(x \cdot \omega - t)$$

é uma solução da equação de ondas (3.1)*. De fato,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = h''(x \cdot \omega - t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x,t),$$

seja qual for $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

A solução $u(x,t) = h(x \cdot \omega - t)$ é comumente chamada **solução *'travelling wave'*** *a equação, e esta é a razão pelo nome* ***'wave equation'*** *(equação de ondas).*

Observação 3.2. *Note que se $u(x,t)$ resolve a equação de ondas, então $u(x,-t)$ também revolve. Isto significa que, a equação de ondas possui a propriedade de reversibilidade do tempo.*

Podemos considerar a equação de ondas sobre outros domínios diferentes do $\mathbb{R}^N$, por exemplo, sobre domínios limitados do $\mathbb{R}^N$ (neste caso necessitamos complementar a equação também com condições de fronteiras), ou variedades riemanianas (neste caso necessitamos escolher uma métrica sobre a variedade e substituir o operador laplaciano sobre o lado direito de 3.2 pelo operador de Laplace-Beltrami determinado pela métrica). Neste trabalho, consideraremos a equação de ondas em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$.

3.2 C_0-grupo gerado pelo operador de ondas

Nesta seção consideraremos o problema de valor inicial para a equação de ondas em $\mathbb{R}^N$, isto é, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.3}$$

Este problema de valor inicial é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Nosso interesse é mostrar, usando teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados, que o operador

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores lineares e limitados para uma escolha apropriada do espaço de Banach. Sabemos que a escolha certa é o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ (munido do produto interno usual).

Dado um vetor $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ definimos a norma

$$|||U||| = ||| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ||| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^2 + |\nabla u|^2 + |v|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Não é difícil ver que o complemento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito à norma $|||.|||$ é o espaço de Hilbert $X = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$. Neste espaço de Hilbert, definimos o operador $\mathcal{A}$ associado com o operador diferencial $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ do seguinte modo.

Definição 3.1. *Seja*

$$D(\mathcal{A}) = H^2(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \tag{3.6}$$

e para todo $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ *seja*

$$\mathcal{A}U = \mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Para provar que o operador $\mathcal{A}$ definido por (3.6) e (3.7) é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo de operadores em X precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 3.1. *Se* $\nu > 0$ *e* $f \in H^k(\mathbb{R}^N)$, $k \geq 0$, *então existe uma única função* $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo*

$$u - \nu\Delta u = f. \tag{3.8}$$

Prova: Sejam $\widehat{f}$ a transformada de Fourier de f e

$$\widehat{u}(x) = \frac{\widehat{f}(x)}{1 + \|x\|^2}.$$

Pela Proposição 1.35 temos que se $f \in H^k(\mathbb{R}^N)$, então $(1 + \|x\|^2)^{\frac{k}{2}}\widehat{f}(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e consequentemente, $(1 + \|x\|^2)^{\frac{k+2}{2}}\widehat{u}(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Se u é definido por

$$u(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)}\widehat{u}(x)dx, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^N,$$

então $u \in H^{k+2}(\mathbb{R}^N)$ e u é uma solução de (3.8).De fato, aplicando a transformada de Fourier, temos

$$\widehat{u}(x) - \nu\widehat{\Delta u}(x) \quad = \quad \widehat{f}(x),$$

isto é,

$$\widehat{u}(x) + \nu\|x\|^2\widehat{u}(x) \quad = \quad \widehat{f}(x),$$

que é equivalente a

$$\widehat{u}(x) \quad = \quad \frac{\widehat{f}(x)}{1 + \nu\|x\|^2}.$$

A unicidade da solução prova-se usando a Alternativa de Freholm (veja Teorema 2.22), pois se $w \in H^{k+2}(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz a equação $w - \nu\Delta w = 0$, então $\widehat{w} = 0$ e, portanto, $w = 0$.

$\square$

Lema 3.2. *Para todo* $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e todo real* $\lambda \neq 0$ *a equação*

$$U - \lambda\mathcal{A}U = F \tag{3.9}$$

possui uma única solução $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H^k(\mathbb{R}^N) \times H^{k-2}(\mathbb{R}^N)$, *para todo* $k \geq 2$. *Além* *disso,*

$$|||U||| \leq (1-|\lambda|)^{-1}|||F|||, \quad \textit{para todo } 0<|\lambda|<1. \tag{3.10}$$

Prova: Sejam $\lambda \neq 0$ um número real e w_1, w_2 soluções de

$$w_i - \lambda^2 \Delta w_i = f_i \quad i=1,2. \tag{3.11}$$

Usando o Lema 3.1, fica claro que tais soluções existem e que $w_i \in H^k(\mathbb{R}^N)$ para todo $k \geq 0$. Seja $u = w_1 + \lambda w_2$ e $v = w_2 + \lambda \Delta w_1$. Note que $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ é uma solução de (3.9). De fato,

$$U - \lambda \mathcal{A} U \;=\; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - \lambda^2 \Delta w_1 \\ w_2 - \lambda^2 \Delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = F,$$

e assim, $u - \lambda v = f_1$ e $v - \lambda \Delta u = f_2$.

Além disso, $U \in H^k(\mathbb{R}^N) \times H^{k-2}(\mathbb{R}^N)$, para todo $k \geq 2$. Denotando $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ o produto escalar em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}
|||F|||^2 &= (f_1 - \Delta f_1, f_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (f_2, f_2)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= (u - \lambda v - \Delta u + \lambda \Delta v, u - \lambda v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (v - \lambda \Delta u, v - \lambda \Delta u)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\geq (u - \Delta u, u)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{0,2}^2 - 2|\lambda| Re(u,v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\geq (1-|\lambda|)|||U|||^2.
\end{aligned}$$

Portanto, se $0 < |\lambda| < 1$, então

$$|||F|||^2 \geq (1-|\lambda|)^2 |||U|||^2. \tag{3.12}$$

$\square$

O Lema 3.2 mostra que a imagem do operador $I - \lambda \mathcal{A}$ contém $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ para todo real λ satisfazendo $0 < |\lambda| < 1$. Desde que o operador $\mathcal{A}$ da Definição 3.1 é fechado, a imagem de $I - \lambda \mathcal{A}$ é todo $X = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ e temos o seguinte corolário.

Corolário 3.3. *Para todo $F \in H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ e todo real λ satisfazendo $0 < |\lambda| < 1$ a equação*

$$U - \lambda \mathcal{A} U = F \tag{3.13}$$

tem uma única solução $U \in H^2(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$|||U||| \leq (1-|\lambda|)^{-1}|||F|||. \tag{3.14}$$

Teorema 3.4. *O operador* $\mathcal{A}$ *da Definição 3.1 é o gerador infinitesimal de um* C_0-*grupo em* $X = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$, *satisfazendo*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{|t|}. \tag{3.15}$$

Prova: O domínio de $\mathcal{A}$, $H^2(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ é claramente denso em X. Usando o Corolário 3.3 segue que $R(\mu : \mathcal{A}) = (\mu I - \mathcal{A})^{-1}$ existe para $|\mu| > 1$ e satisfaz

$$\|(\mu I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{|\mu| - 1}, \quad \text{para todo } |\mu| > 1. \tag{3.16}$$

Usando o Teorema 2.32, temos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ satisfazendo equação (3.15).

□

Corolário 3.5. *Para toda* $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^N)$ *e* $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *existe uma única* $u(x,t) \in C^1(H^2(\mathbb{R}^N); [0,\infty))$ *satisfazendo o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \\ u(x,0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{3.17}$$

Prova: Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ e considere

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

então

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A}T(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix},$$

assim u é a solução desejada.

□

Concluímos esta seção mostrando que se o valor inicial u_0, v_0 de (3.17) são suaves, então o mesmo é solução. Para este fim, note que o teorema de Sobolev [1] pode ser estendido para o domínio ilimitado especial $\Omega = \mathbb{R}^N$ como segue

[1]

Teorema 3.7. *Para todo* $0 \leq m < k - \frac{N}{2}$, *temos*

$$H^k(\mathbb{R}^N) \subset C^m(\mathbb{R}^N). \tag{3.18}$$

Prova: Seja $v \in C_0^\infty$. Dado $y \in \mathbb{R}^N$, é sabido que $y^\alpha \widehat{v}(y) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo α e

$$\mathcal{D}^\alpha v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} i^{|\alpha|} y^\alpha e^{i(x,y)} \widehat{v}(y) dy.$$

Estimando $\mathcal{D}^\alpha v(x)$ pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, para todo $M > \frac{N}{2}$, temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^\alpha v(x)|^2 &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|^2)^{-M} dy \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{2|\alpha|} (1+|y|^2)^M |\widehat{v}(y)|^2 dy \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|^2)^{M+|\alpha|} |\widehat{v}(y)|^2 dy \leq C_2 \|v\|^2_{M+|\alpha|,2} \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde C_1 e C_2 são constantes dependendo de M e $|\alpha|$. Sejam $u \in H^k(\mathbb{R}^N)$ e a sequência $\{u_n\} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^k(\mathbb{R}^N)$. Segue de (3.19), que $\mathcal{D}^\alpha u_n \to \mathcal{D}^\alpha u$ uniformemente em $\mathbb{R}^N$, para todo α satisfazendo $|\alpha| \leq m < k - \frac{N}{2}$, portanto $u \in C^m(\mathbb{R}^N)$.

□

Agora considere o problema de valor inicial (3.17) com $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Não é difícil ver que $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}^k)$ para todo $k \geq 1$, onde $\mathcal{A}$ é o operador definido em 3.1.

Teorema 3.6 (Teorema de Sobolev). *Seja* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}^N$ *com uma fronteira* $\partial\Omega$ *diferenciável, isto é,* $\partial\Omega$ *é de classe* $C^m(\Omega)$, *então*

$$W^{k,p}(\Omega) \subset L^{\frac{Np}{N-kp}}(\Omega), \quad \textit{para todo } kp < N$$

e

$$W^{k,p}(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega}), \quad \textit{para todo } 0 \leq m < k - \frac{N}{p}.$$

Além disso, existem constantes C_1 *e* C_2 *tal que para todo* $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{0,\frac{Np}{N-kp}} \leq C_1 \|u\|_{k,p}, \quad \textit{para todo } kp < N$$

e

$$\sup_{x \in \Omega} \{|\mathcal{D}^\alpha u(x)|; |\alpha| \leq m, x \in \overline{\Omega}\} \leq C_2 \|u\|_{k,p}, \quad \textit{para todo } 0 \leq m < k - \frac{N}{p}.$$

Prova: Ver [12], p. 208, Teorema 1.2.

□

Portanto $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}^k)$ para todo $k \geq 1$ e, em particular, $\Delta^k u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $k \geq 0$. Isto implica que $u \in H^k(\mathbb{R}^N)$, para todo $k \geq 0$ e pelo Teorema 3.7, segue que u é a solução de (3.17), onde $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ para todo $k \geq 0$. Com um pequeno esforço pode-se mostrar que, na verdade, $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ é uma solução clássica de (3.17), mas não vamos fazer neste trabalho.

3.3 C_0-Semigrupo gerado pelo operador de ondas amortecidas

Nesta seção consideraremos o problema de valor inicial para a equação de ondas amortecidas em $\mathbb{R}^N$, isto é, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.20}$$

onde a função $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é estritamente positiva, tal que

$$0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

onde a_0 e a_1 são constantes.

Este problema de valor inicial é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & a(x)I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ \begin{pmatrix} u(x,0) \\ v(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.21}$$

Nosso interesse é mostrar, usando teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados, que o operador

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a(x)I \end{pmatrix}$$

é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Para tanto, considere os seguintes operadores

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a(x)I \end{pmatrix}.$$

Pelo que vimos na Seção 3.2, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-grupo, em particular, um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t},$$

o operador $\mathcal{B}$ é claramente um operador linear e limitado. Aplicando o Teorema 2.57 da Seção 2.9, temos que $\mathcal{C} := \mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\omega + M\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(X)})t}.$$

Assim, o problema (3.20) está associado a um C_0-grupo $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$, onde $T(t) = e^{t\mathcal{C}},$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Volume I: Abstract Linear Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[3] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Jhon Wiley & Sons, Inc, 1966.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

[5] Carvalho, A.N. , Cholewa, J.W. & Dlotko, T., *Equi-exponential attraction and rate of convergence of attractors with application to a perturbed damped wave equation*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics 144(A), 13-51, 2014.

[6] J. B. Conway, *Functions of one complex variable I*, Graduate texts in mathematics, Springer, 2nd ed., 1978.

[7] L. C. Evans, *Partial Defferential Equations*, American Mathematical Society, U.S.A., 1997.

[8] B. G. Folland, *Real Analysis: Modern Techiniques and their Applications*, John Wiley & Sons Inc., 2nd ed., 1999.

[9] E. L. Lima, *Curso de análise vol.2*, 11º.Ed., Rio de Janeiro:IMPA, 2012.

[10] A. C. McBride, *Semigroups of linear operators: an introduction*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific & Technical, New York, 1987.

[11] L. A. J. Medeiros & M. A. M. Miranda *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*, UFRJ-Instituto de Matemática, 2000.

[12] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equantions*, Springer-Velarg, New York, 1983.

[13] F. C. F. Silva, *Existência de solução para algumas equações de evolução via teoria de semigrupo analítico*, Dissertação de Mestrado, CCT-UFCG, 2007.

[14] I.I.Vrabie, C_0-*Semigroups and Aplications*, Elsevier Science, New York, 2003.

[15] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Velarg, New York, 4nd ed. 1974.

[16] L. Tartar, *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Springer-Velarg, Berlin Heidelberg, 2007.